Spectral and Evolution Problems
Vol. 13

Спектральные и эволюционные задачи
Том. 13

Editors:
N. D. Kopachevsky, I. V. Orlov

Taurida National V.Vernadsky University
Simferopol, Ukraine

Simferopol, Ukraine

Taurida National V.Vernadsky University
Black Sea Branch of Moscow State University
Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimean Academy of Sciences
Crimean Mathematical Foundation

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Proceedings of the Thirteenth Crimean Autumn
Mathematical School-Symposium
(KROMSH-2002)

September 18 – 29, 2002, Sevastopol, Laspi

Volume 13

Simferopol, 2003

UDC 517.432+517.515+515.958

Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Thirteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 13. /Group of authors. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2003. — 232 pp. — in English and Russian.

This collection contains accounts of lectures and papers of the participants of the Thirteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, which was held by the Crimean Mathematical Foundation. The materials of the Symposium are devoted to the actual mathematical investigations in the field of spectral and evolutionary problems, and to the close questions.

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of mathematical and physical specialities.

Предисловие

Тринадцатая Крымская Осенняя Математическая школа-Симпозиум КРОМШ-2002 проходила с 18 по 29 сентября 2002г. в поселке Ласпи, в одном из лучших мест Южного Берега Крыма – заливе Батилиман, на территории базы отдыха "Чайка".

Как и в предыдущие годы, Оргкомитет КРОМШ возглавлял заведующий кафедрой математического анализа Таврического Национального Университета им. В.И.Вернадского, профессор Н.Д.Копачевский. Организация и проведение Школы проходили при участии членов локального Оргкомитета, сотрудников кафедры Б.Д.Марянина, М.А.Муратова, И.В.Орлова, Ю.С.Пашковой, С.И.Смирновой, П.А.Старкова.

На Школе было отмечено 80-летие известного математика, академика НАН Украины В.А.Марченко.

В работе Симпозиума приняли участие около 140 математиков из Украины, России, Белоруси, Армении, Польши, Израиля, Японии, Франции и Португалии. Среди них было много известных математиков, много и молодых ученых, аспирантов, студентов.

На Школе были представлены четыре секции; две из них состояли из двух подсекций.

Section 1. *Spectral Problems.*

Subsection 1.1. *Spectral Theory of Not Self-Adjoint Operators* (chair persons A. B. Antonevich (Minsk), M. M. Malamud (Donetsk), V. I. Ovchinnikov (Voronezh), V. S. Shulman (Vologda).

Subsection 1.2. *Spectral Theory of Operator Pencils* (chair persons N. D. Kopachevsky (Simferopol), K. I. Chernyshov (Voronezh), V. S. Rykhlov (Saratov)).

Section 2. *Evolutionary and Boundary-Value Problems.*

Subsection 2.1. *Differential-Operator and Evolutionary Equations* (chair persons V. S. Melnik (Kiyv), S. N. Samborsky (Caen, France)).

Subsection 2.2. *Boundary-Value Problems* (chair persons M. S. Agranovich (Moscow), L. R. Volevich (Moscow), A. L. Skubachevsky (Moscow), Yoshinori Kametaka (Osaka, Japan)).

Section 3. *Optimization, Control, Games and Economic Behavior* (chair persons I. M. Anan'evsky (Moscow), M. V. Mikhalevich (Kiyv), M. I. Zelikin (Moscow).

На КРОМШ-2002 было прочитано около 40 лекций. Ниже приводится список лекций.

Большинство участников Школы представили доклады на заседаниях секций и подсекций. Как всегда, обмен научной информацией не укладывался в формальные рамки. Активное и плодотворное неформальное общение стало многолетней традицией КРОМШ.

В настоящем сборнике трудов КРОМШ-2002 представлены как материалы лекций и докладов, сделанных на Школе, так и некоторые работы участников, формально не доложенные на Школе.

Section 1

SPECTRAL PROBLEMS

Subsection 1.1

Spectral Theory of Not Self-Adjoint Operators

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. В. Акулич
Белорусский государственный университет,
Минск, Белоруссия

The paper contains a description of local representatives and the calculation of the Fredholm property for Toeplitz operators with dicontinuous oscillating coefficients.

В настоящей работе получено описание локальных представителей и найдены условия фредгольмовости для теплицевых операторов с разрывными осцилирующими коэффициентами.

Пусть C — алгебра кусочно-непрерывных функций на единичной окружности S^1, разрывная в точке $m_0 \in S^1$, S — сингулярный интегральный оператор, действующий в $L^2(S^1)$, а P — проектор в пространстве Харди H^2 вида

$$P = \frac{I+S}{2}.$$

Через D мы обозначим алгебру, порожденную операторами, действующими следующим образом:

$$d_c f = P(cf),\ f \in H^2,\ c \in C;$$

через A — алгебру, порожденную операторами $d_a,\ a \in C(S^1)$. Тогда D является алгеброй локального типа по отношеню к C^*-алгебре A и идеалу K компактных операторов, действующих в H^2, то есть для любых $d_a \in A$ и $d_c \in D$ существует оператор $k \in K$, такой, что

$$d_a d_c = d_c d_a + k.$$

Из [1], [2, 33.12], [3, 54.1] известно, что пространсво примитивных идеалов $\mathrm{Prim}\, D$ алгебры D можно представить в виде дизъюнктного объединения:

$$S^1 \setminus \{m_0\} \cup \mathbf{R}_{m_0} \cup (m_0,+) \cup (m_0,-).$$

База топологии на $\mathrm{Prim}\, D$ задается следующим образом :

(a) окрестностью точки $(m_0,+)$ является объединение множеств

$$[m_0, m_1) \cup \{t \in \mathbf{R}_{m_0} : t > N\},$$

где $N \in \mathbf{R}$ и m_1 — произвольная точка, такая, что $m_0 < m_1$ (здесь $<$ — порядок, определенный ориентацией на S^1);

(b) окрестностью точки $(m_0,-)$ является объединение множеств

$$(m_2, m_0] \cup \{t \in \mathbf{R}_{m_0} : t < N\};$$

(c) окрестностью точки $t \in \mathbf{R}_{m_0}$ является открытый интервал на $\mathbf{R}_{m_0}$, содержащий m_0;

(d) окрестность точки $m \neq m_0$ задается стандартным образом (как окрестность точки на кривой).

Обозначим через U_h оператор умножения на функцию $a(m)$, непрерывную на $S^1 \setminus \{m_0\}$, которая в окрестности точки m_0 имеет вид

$$a(m) = \begin{cases} e^{-ih\ln(m_0-m)} & \text{при } m < m_0, \\ e^{-ih\ln(m-m_0)} & \text{при } m_0 < m. \end{cases} \tag{1}$$

Предметом данной работы является алгебра $V = C^*(D, \widetilde{U}_h)$, пороженная операторами $d \in D$ и операторами $\widetilde{U}_h = PU_h,\ h \in \mathbf{R}$.

Каждому элементу $d_c \in D$, определенному функцией $c \in C(S^1 \setminus \{m_0\})$, поставим в соответствие оператор $\pi(d_c)$, действующий в пространстве $l^2(S^1, H_m)$:

$$\pi(d_c) = \bigoplus_{m \in S^1} d_c(m), \tag{2}$$

где $H_{m_0} = L^2(\mathbf{R}_{m_0})$ и $H_m = \mathbf{C}$ при $m \neq m_0$, $d_c(m)$ — локальный представитель элемента d_c в точке m — оператор в H_m, определенный следующим образом [2, 31.30, 33.20]:

(1) если $m = m_0$, то

$$[d_c(m_0)]\xi(t) = \left(c_- + \frac{c_+ - c_-}{1 + e^{-2\pi t}}\right)\xi(t), \tag{3}$$

$$[d_c(m_0, \pm)]\xi(t) = c_\pm \xi(t), \tag{4}$$

где $\xi(t) \in L^2(\mathbf{R}_{m_0})$, c_+ и c_-— это пределы слева и справа функции $c(m)$ при $m \to m_0$;

(2) если $m \neq m_0$, то

$$[d_c(m)]\xi = c(m)\xi, \ \ \xi \in \mathbf{C}. \tag{5}$$

Оператору $\widetilde{U}_h$ поставим в соответствие оператор

$$\pi_h : l^2(S^1, H_m) \to l^2(S^1, H_m),$$

определенный следующим образом:

(1) если $m = m_0$,

$$(\pi_h f)_{m_0}(t) = \frac{1 + e^{-2\pi t} \cdot e^{-\pi h}}{1 + e^{-2\pi t}} \cdot f_{m_0}(t + h), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} (\pi_h f)_{(m_0,+)}(t) = f_{(m_0,+)}(t + h), \\ (\pi_h f)_{(m_0,-)}(t) = e^{-\pi h} f_{(m_0,-)}(t + h); \end{gathered} \tag{7}$$

(2) если $m \neq m_0$, то

$$(\pi_h f)_m = a(m) f_m, \tag{8}$$

где $f = \{f_m\}_{m \in S^1}, \ f_m \in H_m$.

Теорема 1. *Отображения*

$$\sigma : d_c \to \pi(d_c), \ \ d_c \in D,$$

$$\sigma : \widetilde{U}_h \to \pi_h$$

порождают изоморфизм

$$\sigma : C^*(D, \widetilde{U}_h) \Big/ K \to C^*(\pi(D), \pi_h),$$

Доказательство.

Алгебра $C^*(D, \widetilde{U}_h)$ является подалгеброй алгебры $PC^*(B, U_h)P$ на Im P, где B — алгебра, порожденная операторами, действующими в $L^2(S^1)$, вида

$$b = a + dS,$$

a и d — операторы умножения на кусочно-непрерывные на S^1 функции, разрывные в точке $m_0 \in S^1$, поэтому, принимая во внимание теорему 1 из [4], достаточно показать, что формулы (6) — (8) дают нам выражение для $\pi(P)\pi_h\pi(P)$ на Im $\pi(P)$, где $\pi(P)$ и π_h заданы в [4] формулами (2) — (4).

Для того, чтобы не путать обозначения, заменим π, которое встречается в [4], на $\overline{\pi}$. То есть, нам нужно доказать, что

$$\pi_h = \overline{\pi}(P)\overline{\pi}_h\overline{\pi} \ \ \text{на} \ \ \mathrm{Im}\ \overline{\pi}. \tag{9}$$

Из [2, 31.30] известно, что $f \in \operatorname{Im} \overline{\pi}(P)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}e^{-\pi t} \end{pmatrix}$$

и $f \in \operatorname{Ker} \overline{\pi}(P)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \delta(t) \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^{-\pi t} \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda(t),\ \lambda(t)e^{-\pi t},\ \delta(t),\ \delta(t)e^{-\pi t} \in L^2(\mathbf{R})$.

При $m = m_0$ для любого $f \in \operatorname{Im} \overline{\pi}(P)$ имеем:

$$(\overline{\pi}_h f)_{m_0}(t) = f_{m_0}(t+h) = \lambda(t+h) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}e^{-\pi(t+h)} \end{pmatrix} = \gamma(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}e^{-\pi t} \end{pmatrix} + \delta(t) \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^{-\pi t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует:

$$\gamma(t) = \frac{1 + e^{-2\pi t} \cdot e^{-\pi h}}{1 + e^{-2\pi t}} \cdot \lambda(t+h),$$

что доказывает формулу (6). При переходе к пределам $t \to \pm\infty$ получаем формулы (7).

Аналогично проверяется формула (8). Таким образом, равенство (9) верно.

Определение 1. Образ $\sigma(d)$ элемента $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ относительно отображения

$$C^*(D, \widetilde{U}_h) \to C^*(D, \widetilde{U}_h) \Big/ K \cong C^*(\pi(D), \pi_h)$$

называется *символом* оператора d.

Из теоремы 1 следует, что d фредгольмов тогда и только тогда, когда $\sigma(d)$ обратим.

Оператору $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ поставим в соответствие оператор, действующий в $l^2(\mathrm{Prim}\ D, H_x)$:

$$\widetilde{\pi}(d) = \bigoplus_{x \in \mathrm{Prim}\ D} \pi_x(d),$$

где $\pi_x(d)$ определяются равенствами:

(1) если $x = (m_0, t)$, то (3) и (6), $H_x = L^2(S^1)$;
(2) если $x = (m_0, \pm)$, то (4) и (7), $H_x = L^2(S^1)$;
(3) если $x = m,\ m \neq m_0$, то (5) и (8), $H_x = \mathbf{C}$.

Теорема 2. *Отображение* $\widetilde{\pi} : C^*(D, \widetilde{U}_h) \to l^2(\mathrm{Prim}\ D, H_x)$, *определяет изоморфизм*

$$C^*(D, \widetilde{U}_h) \cong \bigoplus_{x \in \mathrm{Prim}\ D} \pi_x(C^*(D, \widetilde{U}_h)) = \widetilde{\pi}(C^*(D, \widetilde{U}_h)). \tag{10}$$

Оператор $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ *обратим в том и только в том случае, когда все* $\pi_x(d),\ x \in \mathrm{Prim}\ D$, *обратимы.*

Доказательство.

Так как действие группы гомеоморфизмов $\{t_h\}_{h \in \mathbf{R}}$ (см. [5, 16.1])

$$t_h = \begin{cases} x, & \text{при } x \in S^1 \setminus \{m_0\}, \\ x + h, & \text{при} x \in \mathbf{R}_{m_0} \cup (m_0, +) \cup (m_0, -) \end{cases}$$

не является топологически свободным, то применим теорему B.28 из [5]. Проверка условий, необходимых для того, чтобы воспользоваться этой теоремой, выполняется тем же способом, что и для теоремы 2 из [4].

Рассмотрим оператор из алгебры $C^*(D, \widetilde{U}_h)$ вида

$$d = d_0 + d_1 \widetilde{U}_h, \tag{11}$$

где d_0, d_1 — теплицевы операторы, определенные соответственно функциями $c_0(m)$, $c_1(m) \in C(S^1 \setminus \{m_0\})$. Пределы справа и слева при $m \to m_0$ этих функций обозначим через $c_0^\pm$ и $c_1^\pm$.

Выпишем в явном виде условия обратимости для оператора $\widetilde{\pi}(d)$, то есть обратимости операторов

$$\widetilde{\pi}_x(d) = \pi_x(d_0) + \pi_x(d_1)\pi_x(\widetilde{U}_h),\ x \in \mathrm{Prim}\ D. \tag{12}$$

Если $x = (m_0, t),\ t \in \mathbf{R}_{m_0}$, то

$$\widetilde{\pi}_{(m_0,t)}(d) = (\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m_0, t) = a_0(t) + a_1(t)T_h,$$

где

$$a_0(t) = c_0^- + \frac{c_0^+ - c_0^-}{1 + e^{-2\pi t}},$$
$$a_1(t) = \left(c_1^- + \frac{c_1^+ - c_1^-}{1 + e^{-2\pi t}}\right) \cdot \frac{1 + e^{-2\pi t} \cdot e^{-\pi h}}{1 + e^{-2\pi t}},$$

T_h — оператор сдвига

$$(T_h f)(t) = f(t + h).$$

Далее воспользуемся теоремой 17.3 [2]. Для этого вычислим пределы:

$$a_0(+\infty) = c_0^- + \frac{c_0^+ - c_0^-}{1 + 0} = c_0^+;$$
$$a_0(-\infty) = c_0^- + 0 \cdot (c_0^+ - c_0^-) = c_0^-.$$

Аналогично находим, что

$$a_1(\pm\infty) = c_1^\pm.$$

Таким образом, по теореме 17.3 [2], оператор $\widetilde{\pi}_{(m_0,t)}(d),\ t \in \mathbf{R}_{m_0}$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$a_0(t) \neq 0 \text{ и } |c_0^\pm| > |c_1^\pm|; \tag{13}$$
$$a_1(t) \neq 0 \text{ и } |c_1^\pm| > |c_0^\pm|. \tag{14}$$

Если $x = (m_0, +)$, то

$$\widetilde{\pi}_{(m_0,+)}(d) = (\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m_0, +) = c_0^+ + c_1^+ T_h.$$

Отсюда оператор $\widetilde{\pi}_{(m_0,+)}(d)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$c_0^+ \neq 0 \text{ и } |c_0^+| > |c_1^+|; \tag{15}$$
$$c_1^+ \neq 0 \text{ и } |c_1^+| > |c_0^+|. \tag{16}$$

Если $x = (m_0, -)$, то

$$\widetilde{\pi}_{(m_0,-)}(d) = (\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m_0, -) = e^{-\pi h}(c_0^- + c_1^- T_h).$$

Оператор $\widetilde{\pi}_{(m_0,-)}(d)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$c_0^- \neq 0 \text{ и } |c_0^-| > |c_1^-|; \tag{17}$$
$$c_1^- \neq 0 \text{ и } |c_1^-| > |c_0^-|. \tag{18}$$

Если $x = m,\ m \neq m_0$, то

$$[\widetilde{\pi}_m(d)]\xi = [(\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m)]\xi = (c_0(m) + c_1(m)a(m))\xi,\ \xi \in \mathbf{C}.$$

Оператор $\widetilde{\pi}_m(d)$ обратим тогда и только тогда, когда

$$(\pi(d_0) + \pi(d_1)\pi(\widetilde{U}_h))(m) \neq 0,$$

что равносильно

$$c_0(m) + c_1(m)|\lambda| \neq 0 \ \ \forall\lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1. \tag{19}$$

Теорема 3. *Оператор $d \in C^*(D, \widetilde{U}_h)$ вида (11) обратим в том и только в том случае, когда выполнено неравенство (19) и по одному из условий (13) или (14), (15) или (16),(17) или (18).*

Рассмотрим теперь оператор вида

$$d = \sum_{j=-s}^{k} d_j \widetilde{U}_h^j, \tag{20}$$

где d_j — операторы, определенные функциями $c_j(m) \in C(S^1 \setminus \{m_0\})$,
$j = \overline{-s, k}$.

Список литературы

[1] Пламеневский Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М., 1986.

[2] AntonevichA., LebedevA. Functional differential equations: I. C^*−theory. Longman Scientific & Technical. 1994.

[3] AntonevichA., LebedevA., Belousov M. Functional differential equations: II. C^*−applications. Longman Scientific & Tech- nical, 1998. Part 2.

[4] Акулич Е.В., ЛебедевА.В.Символическое исчисление для сингулярных интегральных операторов с разрывными осциллирующими коэффициентами... (в печати)

[5] AntonevichA., LebedevA.,BelousovM.Functional differential equations: II. C^*−applications. Longman Scientific & Tech- nical. 1998. Part 1.

Белорусский государственный университет, Минск, Белоруссия

О ПОДОБИИ J-САМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ–САМОСОПРЯЖЁННОМУ

И. М. Карабаш, М. М. Маламуд,
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

1. Напомним, что замкнутые операторы A_1 и A_2 в банаховом пространстве X с областями определения $D(A_1)$ и $D(A_2)$ называют подобными, если найдётся топологический автоморфизм T пространства X такой, что $T(D(A_1)) = D(A_2)$ и $A_2 = TA_1T^{-1}$.

Пусть
$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad q = \overline{q}, \tag{1}$$
самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R})$ с ограниченным потенциалом q, ($|q(x)| \le c$), а J – оператор умножения на функцию $\operatorname{sgn} x$, $J : f \to \operatorname{sgn} x \cdot f$.

В заметке изучается подобие оператора $A := JL$ самосопряженному оператору в случае почти периодического потенциала q. Заметим, что
$$D(A^*) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}) : y(+0) = y(-0),\ y'(+0) = -y'(-0)\} \ne D(A) = W_2^2(\mathbb{R}). \tag{2}$$
Более того, из (2) вытекает, что оператор A имеет двумерную "мнимую компоненту".

Заметим, что спектральные задачи вида
$$(Ly)(x) = \lambda r(x)y(x),$$
где L—самосопряжённый дифференциальный оператор, а r—знакопеременный вес, исследовались давно в связи с некоторыми задачами механики и физики. Так, в работах [1] и [14] изучен вопрос о базисности Рисса из собственных функций упомянутой задачи.

В работах [3] и [6] показано, что оператор A с постоянным потенциалом $q(x) \equiv c = const$ подобен самосопряженному в точности тогда, когда $q = c \ge 0$.

2. Напомним (см. [8], [12]), что потенциал q (оператор L) называют конечнозонным (бесконечнозонным), если q—почти периодическая функция и оператор L имеет конечное (бесконечное) число запрещённых зон (лакун) $(-\infty, \lambda_0)$ и $\{(\lambda_j, \mu_j)\}_1^n$ ($\{(\lambda_j, \mu_j)\}_1^\infty$), где
$$\lambda_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \cdots < \lambda_n < \mu_n < \ldots$$
Хорошо известно, что спектр $\sigma(L) = [\lambda_0, \infty) \setminus \bigcup_{j \ge 1}(\lambda_j, \mu_j)$ оператора L является двукратным и абсолютно непрерывным.

Заметим, что оператор L с почти периодическим (и даже предельно периодическим в смысле Г. Бора) потенциалом может содержать как сингулярную, так и дискретную компоненты или быть, например, чисто точечным. Подчеркнем, однако, что если даже спектр $\sigma(L)$ абсолютно непрерывен, $\sigma(L) = \sigma_{ac}(L)$, то оператор L может не быть бесконечнозонным, так как спектр $\sigma(L)$ может быть канторовым, т.е.–нигде не плотным множеством в $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть L—неотрицательный в $L_2(\mathbb{R})$ оператор вида* (1) *с бесконечнозонным потенциалом q. Тогда оператор $A = JL$ подобен самосопряжённому.*

Пример 1. Пусть L_ξ оператор вида (1) с периодическим потенциалом
$$q(x, \xi) = (1 - k^2)(2 \operatorname{sn}^2(x, k') - 1) + \xi, \quad k \in (0, 1), \quad k' = \sqrt{1 - k^2},$$
где $\operatorname{sn}(x, k')$—эллиптическая функция Якоби. Тогда L_ξ—однозонный периодический оператор с лакунами $(-\infty, \xi) \cup (k^2 + \xi, 1 + \xi)$, и если $\xi \ge 0$, то оператор JL_ξ подобен самосопряжённому.

Доказательство теоремы 1 базируется на резольвентном критерии подобия [13], [10], [2] замкнутого оператора самосопряженному. При этом для интегральной оценки резольвенты применяются теоремы Макенхоупта [9] и Ханта-Макенхоупта-Видена [7] о весовых оценках максимальной функции Харди-Литтлвуда и преобразования Гильберта.

Заметим еще, что как характеристическая функция θ_A оператора A, так и соответствующие ей J-формы $w_A := \theta_A J \theta_A^* - J$ и $w_{*A} := \theta_A^* J \theta_A - J$ не ограничены в каждой из полуплоскостей $\mathbb{C}_\pm$, как в бесконечности, так и вблизи концов лакун оператора L. Это обстоятельство не позволяет применить к оператору A известные достаточные условия подобия замкнутого оператора самосопряженному, выражаемые в терминах J-форм w_A и w_{*A} и близких к ним объектов (см. [11], [5]).

3. При исследовании спектра оператора A мы использовали частный случай следующего результата. Для его формулировки обозначим через $m_\pm(\lambda)$ функции Вейля задач Дирихле для оператора L в пространствах $L^2(\mathbb{R}_\pm)$. Именно, обозначим $s_\pm$ и $c_\pm$–решения уравнений $Ls_\pm(x,\lambda) = \lambda s_\pm(x,\lambda)$ и $Lc_\pm(x,\lambda) = \lambda c_\pm(x,\lambda)$, выделяемые начальными условиями

$$s_\pm(0,\lambda) = c'_\pm(0,\lambda) = 0, \qquad s'_\pm(0,\lambda) = c_\pm(0,\lambda) = 1.$$

Тогда функции Вейля $m_\pm(\lambda)$ определяются соотношениями

$$c_\pm(\cdot,\lambda) \pm m_\pm(\lambda) s_\pm(\cdot,\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_\pm), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3}$$

Напомним, что функции $m_\pm(\lambda)$ являются неванлинновскими или R-функциями, $m_\pm(\lambda) \in (R)$. Это означает, что они голоморфны в $\mathbb{C}_\pm$, $m_\pm(\bar{\lambda}) = \overline{m}_\pm(\lambda)$ и $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im} m_\pm(\lambda) > 0$.

Для формулировки следующего результата напомним определение подклассов $S^{\pm\varkappa}$ класса R, введенных в работе [4].

Определение 1. Функцию F относят к классу $S^{-\varkappa}$, если $F \in (R)$ и для каждых $n \in \mathbb{Z}_+$ и последовательности $\{z_j\}_1^n$ $(z_j \in \mathbb{C}_+,\ j \in \{1,...,n\})$ квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{z_j^{-1} F(z_j) - \overline{z}_k^{-1} \overline{F}(z_k)}{z_j - \overline{z}_k} \xi_j \overline{\xi}_k \tag{4}$$

имеет не более $\varkappa$, а для некоторых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\{z_j\}_1^n$—точно $\varkappa$ отрицательных квадратов.

При $\varkappa = 0$ класс $S^{-0} =: S^-(S^{+0} =: S^+)$ совпадает с известным классом Крейна-Стилтьеса функций $F \in (R)$, голоморфных в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и удовлетворяющих неравенству $F(x) < 0\big(F(x) > 0\big)$ при $x < 0$.

Обозначим через $\varkappa_-(L)$—число отрицательных собственных значений оператора L.

Теорема 2. *Пусть $m_\pm$—функции Вейля оператора L в $L^2(\mathbb{R}_\pm)$, определяемые условиями* (3). *Тогда $\varkappa_-(L) = \varkappa$ точно тогда, когда $m_+ + m_- \in S^{-\varkappa}$. В часности, $L \geq 0$ точно тогда, когда $m_+ + m_- \in S^-$.*

4. Если условие $L \geq 0$ не выполняется, то оператор A может иметь невещественные собственные значения. В случае конечнозонного потенциала спектр оператора A состоит из вещественной непрерывной части и (возможного) конечного числа собственных значений конечной кратности. Поэтому точечный спектр можно отделить,

$$A = A_p \dotplus A_c, \quad \sigma(A_p) = \sigma_p(A), \quad \sigma(A_c) = \sigma_c(A) \subset \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Пусть L–оператор вида* (1) *с конечнозонным потенциалом q. Тогда оператор A_c подобен самосопряжённому точно тогда, когда функции*

$$\frac{\operatorname{Im} m_\pm(\pm\lambda)}{m_+(\lambda) + m_-(-\lambda)}, \quad \frac{\operatorname{Im} m_\pm(\mp\lambda)}{m_+(-\lambda) + m_-(\lambda)} \tag{5}$$

ограничены в окрестности спектра оператора L.

Замечание 1. В случае конечнозонного потенциала q теорема 1 является следствием теоремы 3. Подчеркнем, однако, что в силу теоремы 3 оператор A может быть подобен самосопряженному, не будучи J-неотрицательным, т.е. когда L не является неотрицательным.

Следствие 1. *Если $0 \in (\lambda_0, \lambda_1) \cup \bigcup_j (\mu_j, \lambda_{j+1})$, то есть точка 0 является внутренней точкой множества $\sigma(L)$, то оператор A_c не подобен самосопряжённому оператору.*

Следствие 2. *Если $\Big((\lambda_0, \lambda_1) \cup \bigcup_j (\mu_j, \lambda_{j+1})\Big) \cap \Big((-\lambda_1, -\lambda_0) \cup \bigcup_j (-\lambda_{j+1}, -\mu_j)\Big) = \emptyset$, то есть множества $\sigma(L)$ и $\sigma(-L)$ не имеют общих внутренних точек, то оператор A_c подобен самосопряжённому оператору.*

Пример 2. Рассмотрим оператор-функцию $A(\xi) = JL_\xi$, где L_ξ–однозонный оператор из примера 1. Из теорем 1 и 3 вытекает, что непрерывная часть $A_c(\xi)$ оператора $A(\xi)$ подобна самосопряженному в точности тогда, когда $\xi \in [-1, -k^2] \cup [0, \infty)$. Заметим, что при $\xi \in [-1, -k^2]$ оператор L не является знакоопределенным.

Более детальный анализ показывает, что:

(1) при $\xi \geq 0$ оператор $A(\xi)$ подобен самосопряжённому оператору (по теореме 1) и $\sigma_p(A(\xi)) = \pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)} \subset \mathbb{R}$.

(2) при $\xi \in (-k^2, 0)$ $\sigma_p(A(\xi)) = \pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)} \subset \mathbb{R}$, поэтому $\sigma(A(\xi)) \subset \mathbb{R}$, хотя $A(\xi)$ не подобен самосопряжённому оператору (по следствию 1).

(3) при $\xi = -k^2$, оператор $A(-k^2) = A_c(-k^2)$ подобен самосопряжённому оператору (по следствию 2) и $\sigma_p(A(-k^2)) = \emptyset$.

(4) при $\xi \in [-1, -k^2)$, оператор $A(\xi)$ подобен нормальному оператору, так как он имеет два невещественных однократных собственных значения $\pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)}$, а оператор $A_c(\xi)$ подобен самосопряжённому оператору (по следствию 2).

(5) при $\xi \in (-2+k^2, -1)$ оператор $A(\xi)$ не подобен нормальному, так как $A_c(\xi)$ не подобен самосопряжённому оператору (по следствию 1). $A(\xi)$ имеет два невещественных однократных собственных значения $\pm\sqrt{(\xi+1)^2 - (1-k^2)}$.

(6) при $\xi < -2+k^2$, $\sigma_p(A(-k^2)) = \emptyset$, $\sigma(A(\xi)) \subset \mathbb{R}$, однако оператор $A(\xi) = A_c(\xi)$ не подобен самосопряжённому оператору (по следствию 1).

Список литературы

[1] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.—1985.—V. 56, no. 3.— P.391–407.

[2] Casteren J. A. *Operators similar to unitary or selfadjoint ones* // Pacific J. Math.—1983.—V. 104, no. 1.—P.241–255.

[3] Curgus B., Najman B. *The operator $-(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$.* // Proc. Amer. Math. Soc.—1995.— V. 123.—P.1125–1128.

[4] Derkach V. A., Malamud M. M. *Generalized Resolvents and Boundary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps.* // J. Functional Analysis —1991— Vol. 95, No.1, P. 1-95.

[5] Капустин В. В. *Спектральный анализ почти унитарных операторов.* // Алгебра и Анализ.—2001.—т. 13, No 5–С.44-68.

[6] Karabash I. M., *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—2000.—Vol. 6, No.2.—P.22–49.

[7] Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. L. *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—V. 176.—P.227–251.

[8] Левитан Б. М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.*— Москва: Наука, 1984.—240 с.

[9] Muckenhoupt B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function* // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 165.—P.207–226.

[10] Маламуд М. М. *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному* // Укр. мат. журн.—1985.—Т. 37, no. 1.—С.49–56.

[11] Маламуд М. М. *О подобии треугольного оператора диагональному* // Записки научных семинаров РОМИ.—2000—Т. 270. С.201–241.

[12] Марченко В. А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.*— Киев: Наукова думка, 1977.—435 с.

[13] Набоко С. Н. *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам* // Функц. анализ и его прилож.—1984.—Т. 18, no. 1.—С.16–27.

[14] Пятков С. Г. *Некоторые свойства собственных функций линейных пучков* // Сибирский мат. журнал.—1989.—Т. 30, no. 4.—С.111–124.

Karabash I. M., Malamud M. M., Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja, 24, 83055 Donetsk, Ukraine.

О ПОДОБИИ НОРМАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ОПЕРАТОРОВ ТИПА $\operatorname{sgn} x \left(D^2 + aD + bI + c\delta\right)$

А. С. Костенко
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

В $L^2(\mathbb{R})$ изучается оператор $\operatorname{sgn} x(D^2+aD+bI)$, порождаемый граничными условиями типа склейки в точке 0. Описывается класс граничных условий, для которых оператор подобен нормальному или самосопряженному. В частности, получен критерий подобия нормальному для операторов $\operatorname{sgn} x(D^2 + aD + bI + c\delta)$ и $\operatorname{sgn} x(D^2+bI+c\delta')$. Оказывается, эти операторы подобны нормальному для почти всех $c \in \mathbb{C}$.

Keywords: симметрический оператор, граничная тройка, функция Вейля, резольвента, спектр

1. Спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x)y(x),$$

где L - самосопряжённый дифференциальный оператор, а функция $r(x)$ принимает значения разных знаков, исследуются давно в связи с некоторыми задачами механики и физики (см. библиографию в [13]). В работах Р. Билса [13] и С. Г. Пяткова [10] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса собственных функций для такой спектральной задачи. В последнее время активно исследуются аналогичные вопросы для операторов с непрерывным спектром. Именно, вместо базисности Рисса для операторов с непрерывным спектром изучается подобие их нормальным операторам. Так в работе Б. Кургуса и Б. Наймана [14], с помощью теории М. Крейна - Г. Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна, было показано, что оператор

$$\tilde{A} = \operatorname{sgn} x D^2, \quad D := \frac{1}{i}\frac{d}{dx}, \quad \operatorname{dom}(\tilde{A}) = W_2^2(\mathbb{R}) \tag{1}$$

подобен самосопряжённому оператору. И. М. Карабаш в [16] предложил простое доказательство этого факта, базирующееся на резольвентном критерии подобия [7, 9]. Еще одно доказательство предложено в работе [4]. Этот результат обобщался в работах [15], [17] и [5]. В работе [11] (см., также, библиографию в [11]) получены достаточные условия подобия самосопряженному операторов вида

$$L = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha p(x)} D^2, \quad \alpha > -1, \ 0 < c < p(x) < C < +\infty, \tag{2}$$

с естественной областью определения $\operatorname{dom}(L) = W_2^2(p(x)|x|^\alpha, \mathbb{R})$.

Отметим, что известные достаточные условия подобия самосопряженным, выражаемые как в терминах характеристической функции оператора, так и близких к ней объектов (см. [8] и имеющуюся там библиографию), для данных операторов не выполняются.

2. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ симметрический оператор

$$A = \operatorname{sgn} x p(D), \quad p(z) = z^2 + az + b, \quad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom}(A) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}) \ : y(0) = y'(0) = 0\}. \tag{4}$$

В заметке изучаются квазиэрмитовы (см. [1]) расширения оператора A, соответствующие различным граничным условиям в точке 0. Наша цель – дать описание тех граничных условий, при которых соответствующий дифференциальный оператор подобен нормальному (самосопряженному) оператору (случай $p(z) = z^2$ полностью рассмотрен в работе [5]).

Заметим, что в рассматриваемом семействе расширений оператора A содержатся операторы, порождаемые в $L^2(\mathbb{R})$ дифференциальными выражениями

$$L_c := \operatorname{sgn} x \, (p(D) + c\delta(x)) \,, \quad c \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

$$L_c := \operatorname{sgn} x \left(D^2 + bI + c\delta'(x)\right) , \quad c \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

где $\delta(x)$–это δ-функция Дирака (см. примеры 1 и 2).

3. В последнее время для изучения собственных расширений симметрических операторов используется концепция граничных троек и соответствующих им функций Вейля. Приведем основные определения и обозначения следуя работе [3].

Пусть A – симметрический оператор с плотной областью определения $\operatorname{dom}(A)$ в гильбертовом пространстве H и равными индексами дефекта $n_+(A) = n_-(A)$ $(n_\pm(A) = \dim(H \ominus ran(A \pm iI))$

Определение 1 ([2]). Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$–сепарабельное гильбертово пространство, а Γ_0, Γ_1–линейные отображения из $\operatorname{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется граничной тройкой для A^*, если отображение $\Gamma : f \to \{\Gamma_1 f, \Gamma_0 f\}$ из $\operatorname{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюрьективно и справедлива формула Грина

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \operatorname{dom}(A^*). \tag{7}$$

С каждой граничной тройкой $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ естественно связаны два самосопряженных расширения $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^{\,*} : \operatorname{dom}(\tilde{A}_i) = \ker \Gamma_i, \quad i = 0, 1.$

Определение 2 ([3]). Оператор–функция $M(\lambda)$, определенная равенством

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \ (f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \ \lambda \in \rho(\tilde{A}_0)) \tag{8}$$

называется функцией Вейля, соответствующей граничной тройки $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. Здесь $\mathfrak{N}_\lambda := \ker(A^* - \lambda I)$.

4. Оператор A, определяемый равенствами (3), (4), замкнут и имеет индексы дефекта $(2, 2)$. Нетрудно видеть, что

$$A^* = \operatorname{sgn} x p(D), \quad \operatorname{dom}(A^*) = \tilde{W_2^2}(\mathbb{R}) := W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+). \tag{9}$$

Далее, совокупность $\Pi_1 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_1 f = (f'(+0) + i\frac{a}{2}f(+0), \ -f(-0)), \quad \Gamma_0 f = (f(+0), \ f'(-0) + i\frac{a}{2}f(-0)), \tag{10}$$

будет граничной тройкой для оператора A^*. Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ($\mathbb{C}^{m\times m}$ – множество $m \times m$ матриц с элементами из $\mathbb{C}$). Определим A_B как сужение оператора A^* на область определения

$$\operatorname{dom}(A_B) = \{f \in \tilde{W_2^2}(\mathbb{R}) : \{f'(+0) + i\frac{a}{2}f(+0), \ -f(-0)\}^t = B\{f(+0), \ f'(-0) + i\frac{a}{2}f(-0)\}^t\}. \tag{11}$$

Другими словами, A_B – это оператор, задаваемый выражением (3) и граничными условиями

$$\begin{cases} f'(+0) + \frac{ia}{2}f(+0) = b_{11}f(+0) + b_{12}(f'(-0) + \frac{ia}{2}f(-0)) \\ -f(-0) = b_{21}f(+0) + b_{22}(f'(-0) + \frac{ia}{2}f(-0)). \end{cases} \tag{12}$$

Ясно, что $A_B^* = A_{B^*}$. В частности, A_B самосопряжён точно тогда, когда $B = B^*$.

Обозначим

$$d := b - \frac{a^2}{4}, \quad \eta_+(\lambda) := \sqrt{\lambda - d}, \quad \eta_-(\lambda) := -i\sqrt{\lambda + d}, \tag{13}$$

где $\sqrt{\lambda}$ ветвь аналитической функции $\sqrt{\lambda}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$ такая, что $\sqrt{\lambda} \geq 0$ на верхнем берегу разреза. Далее, функция Вейля, соответсвующая тройке Π_1, имеет вид

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} i\eta_+(\lambda) & 0 \\ 0 & \frac{i}{\eta_-(\lambda)} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Пусть $\sigma_c(A), \sigma_r(A), \sigma_p(A)$ – непрерывный, остаточный и точечный спектры оператора A.

Предложение 1. Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Пусть также

$$\varphi(\lambda) := \det(B - M(\lambda)), \quad \varphi_*(\lambda) := \det(B^* - M(\lambda)) \tag{15}$$

Тогда для оператора A_B вида (11) справедливы следующие утверждения:
1) $\sigma_c(A_B) = \mathbb{R} \setminus (-d, d)$; 2) $\sigma_r(A_B) = \emptyset$;
3) $\sigma_p(A_B) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup (-d,\ d) : \varphi(\lambda) = 0\} \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C}_- \cup (-d,\ d) : \varphi_*(\overline{\lambda}) = 0\}$.

Здесь и далее будем считать $(-d, d) := \emptyset$, если $d \leq 0$.

Доказательство. Простые вычисления показывают, что во множестве $\mathbb{R} \setminus (-d,\ d)$ собственных значений нет. Из этого легко следует утверждение о непрерывном спектре. Утверждение о точечном и остаточном спектре с очевидностью вытекает из [3, Предложение 4].

Следующая теорема – основной результат заметки.

Теорема 1. *Пусть* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *и* $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$. *Тогда оператор* A_B *подобен нормальному, если и только если функции* $\varphi(\lambda)$ *и* $\varphi_*(\lambda)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) φ *и* φ_* *не имеют нулей в* $\sigma_c(A_B) \cup \{\infty\}$*;*

2) φ *и* φ_* *не имеют нулей кратности 2 во множестве* $\mathbb{C}_+ \cup (-d,\ d)$.

Оператор A_B *подобен самосопряжённому тогда и только тогда, когда функции* $\varphi(\lambda)$ *и* $\varphi_*(\lambda)$ *не имеют нулей в* $\overline{\mathbb{C}_+} \setminus (-d, d)$ *и нулей кратности 2 в* $(-d,\ d)$.

Замечание 2. Случай $b_{12} = b_{21} = 0$ менее интересен потому, что оператор с такими граничными условиями распадается в прямую сумму двух дифференциальных операторов A_+ и A_-, следующего вида

$$A_\pm := p(D), \quad \mathrm{dom}(A_\pm) := \{f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm) : \ f(\pm 0) + h_\pm f'(\pm 0) = 0\}, \ h_\pm \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{16}$$

Такие операторы подробно изучены.

5. Хорошо известно, что условие

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{\mathrm{const}}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T))} \tag{17}$$

необходимо для подобия оператора T нормальному оператору.

Для доказательства теоремы 1 сформулируем несколько предложений.

Предложение 2. Если $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+ \cup (-d,\ d)$ является нулем второго порядка функции $\varphi(\lambda)$ (функции $\varphi_*(\lambda)$) вида (15), то резольвента $(A_B - \lambda I)^{-1}$ имеет в точке λ_0 ($\overline{\lambda_0}$) полюс второго порядка и, значит, оператор A_B не подобен нормальному.

Рассмотрим теперь случай когда функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ вида (15) обращаются в нуль на непрерывном спектре $\sigma_c(A_B)$.

Предложение 3. Если $\lambda_0 \in \sigma_c(A_B)$ является нулем либо функции $\varphi(\lambda)$, либо функции $\varphi_*(\lambda)$, то оценка (17) для оператора A_B не выполнятся в окрестности точки λ_0.

Предложение 4. Для того чтобы оценка (17) выполнялась в окрестности ∞ необходимо, чтобы функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ не имели нуля в бесконечности.

Из предложений 1 – 4 вытекает необходимость выполнения условий теоремы 1. Доказательство достаточности основанно на резольвентном критерии подобия замкнутого оператора самосопряжённому [7, 9] и теореме вложения Карлесона (см. [6]).

6. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Пусть $\delta(x)$ – δ–функция Дирака. Выражение $l_c := JL_c$, где $J : f(x) \to \operatorname{sgn} x f(x)$, а L_c оператор вида (5), порождает в $L^2(\mathbb{R})$ (см. [12]) следующий дифференциальный оператор

$$\begin{cases} l_c := D^2 + aD + bI, \\ \operatorname{dom}(l_c) = \{f \in \tilde{W}_2^2(\mathbb{R}) : f(+0) = f(-0), \quad f'(+0) - f'(-0) = cf(+0)\}. \end{cases} \tag{18}$$

Ясно, что L_c – это в точности оператор A_B вида (3), (12), причем $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Предложение 5. Пусть L_c – оператор вида (5) и d определяется равенством (13). Справедливы следующие утверждения.

1) Если $d < 0$, то оператор L_c подобен нормальному, точно тогда когда $c \neq -x \pm i\sqrt{x^2 - 2d}$, $(x > 0)$ и $c \neq iy$, $y \in [-\sqrt{-2d}, \sqrt{-2d}]$.
При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если $\operatorname{Re}(c) \geq 0$, либо $|\operatorname{Im}(c)| > \sqrt{\operatorname{Re}^2(c) - 2d}$.

2) В случае $d \geq 0$ оператор L_c подобен нормальному тогда и только тогда, когда $c \neq -\sqrt{x^2 + 2d} \pm ix$, $(x \geq 0)$.
При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если $\operatorname{Re}(c) \geq -\sqrt{2d}$, либо $\operatorname{Re}(c) > -\sqrt{\operatorname{Im}^2(c) + 2d}$.

Пример 2.

Дифференциальное выражение $l_c := D^2 + bI + c\delta'$, $(c \in \mathbb{C})$ порождает в $L^2(\mathbb{R})$ оператор (см. [12])

$$\begin{cases} L_c := D^2 + bI, \\ \operatorname{dom}(L_c) = \{f \in \tilde{W}_2^2(\mathbb{R}) : f'(+0) = f'(-0), \quad f(+0) - f(-0) = cf'(-0)\}. \end{cases} \tag{19}$$

Оператор JL_c совпадает с оператором A_B вида (3), (12) с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$.

Предложение 6. Пусть L_c – оператор вида (6). Справедливы следующие утверждения.

1) Если $b \geq 0$, то оператор L_c подобен нормальному, точно тогда когда $c \neq -\frac{x}{\sqrt{1+2bx^2}} \pm ix$, $(x > 0)$.
При этом L_c подобен самосопряженному оператору, если и только если $\operatorname{Re}(c) \in (-\infty,\ -1/\sqrt{2b}] \cup [0,\ +\infty)$, либо $|\operatorname{Re}(c)| > \frac{|\operatorname{Im}(c)|}{\sqrt{1+2b\operatorname{Im}^2(c)}}$.

2) В случае $b < 0$ оператор L_c подобен нормальному тогда и только тогда, когда $c \neq iy$, $y \in \mathbb{R}$ и $c \neq -\frac{1}{x} \pm \frac{i}{\sqrt{x^2-2b}}$, $(x > 0)$.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи и руководство работой, а также И. М. Карабашу за ряд ценных замечаний.

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* — Харьков: "Вища Школа", 1978, Т. 2.—287 с.

[2] Горбачук В. И., Горбачук М. Л.*Граничные задачи для дифференциально–операторных уравнений.*— Киев: Наук. думка, 1984.—284 С.

[3] Деркач В. А., Маламуд М. М. *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов* // Укр. мат. журн.—1992.—Т. 44, no. 4.—С.435–459.
[4] Капустин В. В.*Несамосопряженные расширен ия симметрических операторов.* // Записки научных семинаров ПОМИ.—2001.—Т.282,—С. 92—105.
[5] Карабаш И. М., Костенко А. С. *О подобии операторов типа* $\operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta\right)$ *нормальному.* // Матем. заметки(в печати).
[6] Кусис П. *Введение в теорию пространств* H^p.—М:"Мир",1984.—386 с.
[7] Маламуд М. М. *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному* // Укр. мат. журн.—1985.—Т. 37, no. 1.—С.49–56.
[8] Маламуд М. М.*О подобии треугольного оператора диагональному*// Записки научных семинаров ПОМИ.— 2000.—Т. 270,—С. 201—241.
[9] Набоко С. Н. *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам* // Функц. анализ и его прилож.—1984.—Т. 18, no. 1.—С.16–27.
[10] Пятков С. Г. *Некоторые свойства собственных функций линейных пучков* // Сибирский мат. журнал.—1989.—Т. 30, no. 4.—С.111–124.
[11] Фаддеев М. М., Штеренберг Р. Г. *О подобии некоторых дифференциальных операторов самосопряжённым* // Матем. заметки.—2002.—Т. 72. — С.292—303.
[12] Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh–Krohn R., Holden H. *Solvabel models in quantum mechanics.* — Springer, New–York.—1988.
[13] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.—1985.—V. 56, no. 3.— P.391–407.
[14] Ćurgus B., Najman B. The operator $-(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$. // Proc. Amer. Math. Soc.—1995.— V. 123.—P.1125–1128.
[15] Ćurgus B., Najman B. *Positive differential operator in Krein space* $L^2(\mathbb{R})$. // Oper. Theory Adv. and Appl.,Birkhäuser, Basel.—1996.— V. 87.—P.95–104.
[16] Karabash I. M. *The operator* $-\operatorname{sgn} x \frac{d^2}{dx^2}$ *is similar to a self–adjoint operator in* $L^2(\mathbb{R})$.// Spectral and evolutionary problems, Proc. of the Eighth Crimean Autumn Math. School-Symposium, Simferopol.-1998.-Vol.8.-P.23–26.
[17] Karabash I. M., *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—2000.—V. 6, no. 2.—P.22–49.

Kostenko A.S., Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja 24, 83055 Donetsk, Ukraine

E-mail: aleksey_kostenko@mail.ru

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВИДЕ СУММЫ ОРТОПРОЕКТОРОВ.

Л.Л. Оридорога
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

1. Введение. Задача о представлении скалярных операторов λI в гильбертовом пространстве H исследовались различными авторами (см., например, [1]–[3] и список литературы в них)

Так в [2] рассматриваются множества Λ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k проекторов и Σ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k ортопроекторов.

При этом показано, что $\Lambda_k = \Sigma_k$ при $k \leq 4$ и

$$\Lambda_1 = \Sigma_1 = \{0, 1\}, \quad \Lambda_2 = \Sigma_2 = \{0, 1, 2\}, \quad \Lambda_3 = \Sigma_3 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}.$$

Кроме того, там же показано что $\Lambda_k = \mathbb{C}$ при $k \geq 5$, а при $k \geq 6$ справедливы соотношения

$$\Sigma_k \supset \{0, 1, 1 + \frac{n}{n(k-3)+2}, [1 + \frac{1}{k-3}, k-1-\frac{1}{k-3}], k-1-\frac{n}{n(k-3)+2}, k-1, k\}.$$

В [3] показано также, что при $k \geq 6$ справедливо включение

$$\Sigma_k \subset \{0, 1, 1 + \frac{1}{k-1}, [1 + \frac{1}{k-2}, k-1-\frac{1}{k-2}], k-1-\frac{1}{k-1}, k-1, k\}.$$

В [1] дано полное описание множеств Σ_k. Там же изучается задача описания, с точностью до унитарной эквивалентности, систем проекторов P_j таких, что $\sum_{j=1}^{k} P_j = \lambda I$

Отметим также работу [5], в которой показано, что оператор $0I$ может быть представлен в виде суммы пяти (но не может быть представлен в виде суммы четырёх!) **ненулевых** проекторов.

В данной заметке для каждой положительноопределённой диагональной матрицы с целым следом, превышающим её размер, в явном виде указываются её представление в виде суммы проекторов. Существование данного представления (без указания точной конструкции) было доказано Филлмором в [7].

Кроме того, показано для каких скалярных операторов их представление в виде суммы проекторов единственно (с точностью до унитарной эквивалентности). А именно показано, что при $n > 1$ представление $\frac{k}{n} I_n$ в виде суммы проекторов единственно, с точностью до унитарной эквивалентности, при $k = n + 1$ и не единственно при $k > n + 1$. При этом теорема 2 повторяет результат, полученный ранее в [6]. Однако, доказательство, приведённое в данной работе, основано на другой идее и существенно отличается от доказательства имеющегося в [6].

2. Усиление теоремы Филлмора.

Теорема 1. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, такие, что $m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ — целое число, причём $m \geq n$. Пусть, далее, $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < m$ и P_l –*

ортопроектор на единичный вектор $\vec{x_l}$, *где*

$$\vec{x_l} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} e^{\frac{2\pi i k_1}{m} l} \\ \sqrt{a_2} e^{\frac{2\pi i k_2}{m} l} \\ \dots \\ \sqrt{a_n} e^{\frac{2\pi i k_n}{m} l} \end{pmatrix}, \qquad l \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Тогда $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Доказательство. Обозначим p_{lij} элемент матрицы P_l, т.е.

$$P_l = (p_{lij})_{i,j=1}^{n}.$$

Поскольку вектор $\vec{x_l}$ нормирован, $\|\vec{x_l}\| = 1$ то

$$P_l = x_l \cdot x_l^*.$$

Поэтому

$$p_{lij} = \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m} l}.$$

Причём $|k_i - k_j| < m$ и кроме того $|k_i - k_j| = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$. Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{m-1} p_{lij} = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \left(\sqrt{a_i a_j} e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m}} \right)^l = \sqrt{a_i a_j}\, \delta_i^j.$$

А это и означает, что $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

В качестве следствия из теоремы 1 легко вытекает следующая теорема Филлмора (см. [7])

Следствие 1. ([7]) *Пусть A — неотрицательная матрица с целым следом, причём её след не меньше её ранга. Тогда матрица A может быть представлена в виде суммы ортопроекторов.*

Замечание 3. Конструкция, предложенная в теореме 1, аналогична конструкции, использованной ранее автором в [4], для представления скалярного конечномерного оператора в виде суммы проекторов.

3. Пример. Ниже приведён пример набора ортопроекторов, описанных в теореме 1.

Пример. Пусть $A = \operatorname{diag}\{\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{4}{9}\}$ Пусть также $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2$.
Тогда

$$\vec{x_0} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x_3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ -1 \end{pmatrix}$$

При этом

$$P_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -4i & -2 \\ 4i & 4 & -2i \\ -2 & 2i & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4i & -2 \\ -4i & 4 & 2i \\ -2 & -2i & 1 \end{pmatrix}.$$

4. О единственности представления скалярного оператора суммой ортопроекторов. Случай $k = n + 1$. Здесь мы рассмотрим единственность представления скалярного оператора, с точностью до унитарной эквивалентности.

Определение. Системы $\{P_j\}_{j=1}^k$ и $\{Q_j\}_{j=1}^k$ операторов P_j и Q_j, определенные на гильбертовом пространстве H называются унитарно эквивалентными, если существует такой унитарный оператор U в H, что

$$P_j = U^* Q_j U, \qquad j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Следующая теорема получена недавно в [6]. Мы приведем иное доказательство, основанное на совершенно другой идее.

Теорема 2. *Пусть $k = n+1$. Тогда оператор $\frac{k}{n} I$ в n-мерном комплексном пространстве может быть представлен единственным, с точностью до унитарной эквивалентности, образом в виде суммы ортопроекторов.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{j=1}^k P_j = \frac{k}{n} I.$$

Предположим вначале, что все P_j — одномерные.

В таком случае P_j может быть записан в виде

$$P_j = x_j \cdot x_j^*,$$

где вектор x_j определён однозначно, с точностью до множителя, равного по модулю единице.

Выберем вектор x_1 произвольно, а остальные x_j таким образом, что $(x_1, x_j) \le 0$. Обозначим X матрицу составленную из вектор-столбцов x_j. Обозначим G матрицу Грама системы векторов x_j. Поскольку $G = X^* X$ и $XX^* = \frac{k}{n} I$, то n собственных чисел матрицы G равны $\frac{k}{n}$ и одно равно 0. Следовательно матрица $\tilde{G} = \frac{k}{n} I - G$ имеет ранг 1. Кроме того, поскольку при всех j $G_{jj} = 1$, то все числа стоящие на диагонали матрицы $\tilde{G}$ равны $\frac{1}{n}$. Кроме того, из условия нормировки векторов x_j следует, что все числа в первой строке матрицы $\tilde{G}$ неотрицательны. Но в таком случае все элементы матрицы $\tilde{G}$ равны $\frac{1}{n}$. Следовательно, при данной нормировке векторов x_j

$$(x_j, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ -\frac{1}{n} & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

Следовательно, при данной нормировке, вектора x_j определяются однозначно, с точностью до унитарной эквивалентности.

Заметим теперь, что если бы среди P_j содержался проектор на подпространство размерности выше единицы, то его можно было бы представить в виде суммы проекторов на ортогональные одномерные подпространства. В таком случае мы бы получили представление оператора $\frac{k}{n} I$ в виде суммы одномерных проекторов, отличное от приведённого выше, что невозможно.

5. Неединственность представления в случае $k > n + 1$.

Исследуем теперь случай $k > n + 1$. Оказывается, что в этом случае единственность искомого представления нарушается.

Теорема 3. *В том случае, когда $n > 1$ и $k > n+1$ оператор $\frac{k}{n}\, I$ в n-мерном пространстве может быть представлен в виде суммы ортопроекторов на одномерные подпространства бесконечным числом различных, с точностью до унитарной эквивалентности, способов.*

Доказательство. Пусть x_j и y_j — два набора из k векторов, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = \sum_{j=1}^{k} Q_j = \frac{k}{n}\, I,$$

где $P_j = x_j \cdot x_j^*$ и $Q_j = y_j \cdot y_j^*$.

Тогда для того, чтобы системы проекторов P_j и Q_j были унитарно эквивалентными, необходимо, чтобы существовала такая перестановка векторов x_j, при которой

$$|(x_{j_1}, x_{j_2})| = |(y_{j_1}, y_{j_2})|,$$

при любых j_1 и j_2.

Рассмотрим сначала случай $k \geq 2n$.

В этом случае можно рассмотреть системы векторов x_j и y_j составленные таким образом, что

$$\sum_{j=1}^{k-n} P_j = \sum_{j=1}^{k-n} Q_j = \frac{k-n}{n}\, I,$$

и кроме того подсистемы $(x_j)_{j=k-n+1}^{k}$ и $(y_j)_{j=k-n+1}^{k}$ образуют ортогональные базисы в пространстве $\mathbb{C}^n$. При этом базис $(x_j)_{j=k-n+1}^{k}$ выбирается произвольно, после чего вектор y_{k-n+1} берётся таким, что при любых j_1 и j_2 $|(y_1, y_{k-n+1})| \neq |(x_{j_1}, x_{j_2})|$.

Пусть теперь $k < 2n$.

Рассмотрим в $(k-n)$-мерном пространстве системы векторов x_j и y_j, построенные как указано выше. Пусть G_x и G_y их матрицы Грама. Тогда $k-n$ собственных чисел этих матриц равны $\frac{k}{k-n}$, а остальные n собственных чисел равны 0. Кроме того все числа на диагонали равны 1.

Рассмотрим матрицы $\tilde{G}_x = \frac{k}{n}\, I - \frac{k-n}{n}\, G_x$ и $\tilde{G}_y = \frac{k}{n}\, I - \frac{k-n}{n}\, G_y$. У этих матриц n собственных чисел равны $\frac{k}{n}$, а остальные $k-n$ собственных чисел равны 0. Кроме того все числа на диагонали равны 1. Таким образом каждая из матриц $\tilde{G}_x$ и $\tilde{G}_y$ является матрицей Грама некоторой системы единичных векторов ($\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$ соответственно) лежащих в n-мерном пространстве.

При этом суммы проекторов на вектора каждой из этих систем равны $\frac{k}{n}\, I$. А поскольку при любых j_1 и j_2 $|(\tilde{y}_1, \tilde{y}_{k-n+1})| \neq |(\tilde{x}_{j_1}, \tilde{x}_{j_2})|$, то эти системы проекторов не являются унитарно эквивалентными.

Благодарность. Я искренне признателен М.М. Маламуду за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы

[1] *С.А. Кругляк, В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* О суммах проекторов // Функциональный анализ и приложения — 2002. — 36, №3 — p.20–35

[2] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функциональный анализ и приложения — 2000. — 34, №4 — p.91–93

[3] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Скалярные операторы представимые суммой проекторов // Укр. мат. журнал — 2001. — т.53, №7 — p.939–952

[4] *Л.Л. Оридорога* Скалярные операторы в конечномерных пространствах, представимые в виде суммы проекторов // Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского — 2002. — т.15(54), №1: Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — p.15–18

[5] *Bart H., Ehrhart T., Silbermann B.* // Integral Equations Operator Theory — 1994. — 19 — p.123–134

[6] *E.R. Djeldubaev, S.A. Kruglyak* On representation of the *-algebra $\mathcal{P}_{N,1+\frac{1}{N-1}}$ // Methods of Functional Analysis and Topology — 2001. — v.7 — №2 — p.35–41

[7] *P.A. Fillmore* On Sums of Projections // Journal of Functional Analysis — 1969. — №4 — p.146–152

Л.Л. Оридорога, кафедра математического анализа и теории функций, математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк

E-mail: `oridoroga@skif.net`

ЗАДАЧА О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ГРУЗОМ НА КОНЦЕ

А.В. Яковлев
Таврический национальный университет,
Симферополь, Украина

В работе исследуются структура спектра задачи о нормальных колебаниях вязкоупругого стержня с грузом на конце, определяются свойства системы собственных и присоединенных элементов задачи.

Keywords: Операторный пучок, спектральная задача

1^0. *К истории вопроса.*

Пусть вязкоупругий стержень длины l находится в вязкоупругой среде и в состоянии покоя расположен вдоль оси Ox. Вдоль оси Oy действует однородное гравитационное поле, левый конец стержня $x = 0$ жестко защемлен, а на правом конце $x = l$ находится груз массы $m > 0$.

Соответствующая спектральная задача без груза на конце исследовалась ранее в работах В.Н. Пивоварчика [29] – [30], С.М. Баркаря и В.Н. Пивоварчика [10], П. Ланкастера и А.А. Шкаликова [24], Р.О. Гринива и А.А. Шкаликова [13].

Данная работа отличается от упомянутых выше как постановкой задачи (присутствие груза на конце и наличие внешнего вязкоупругого трения), так и полученными результатами (изучена структура спектра, свойства системы собственных и присоединенных элементов). Кроме того, отличен и математический аппарат, при помощи которого данные результаты получены. В частности, применяются свойства самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, а также подходы, основанные на использовании так называемых операторных блок-матриц с неограниченными операторными коэффициентами. Отметим, что последнее направление в прошедшие 10 лет активно развивается в работах Аткинсона Ф.В., Лангера Г., Менникена Р., Шкаликова А.А. [7], Адамяна В.М., Лангера Г. [1], Адамяна В.М., Лангера Г., Менникена Р., Саурер Дж. [2], Лангера Н., Моллера М. [23], Менникена Р., Шкаликова А.А. [28], Шкаликова А.А. [31], Константинова А.Ю. [14], Т.Я. Азизова, Н.Д. Копачевского и Л.Д. Орловой [4] – [5], Т.Я. Азизова Ф. Хардта, Н.Д. Копачевского, Р. Менникена [6], Н.Д. Копачевского, Р. Менникена, Ю.С. Пашковой, Кр. Треттер [15] и других.

2^0. *Постановка задачи.*

В работе автора [32] исходная начально-краевая задача о малых колебаниях стержня с грузом на конце была приведена к исследованию задачи Коши

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + (\gamma A + C)\frac{\hat{u}}{t} + (A+B)\hat{u} = \hat{f}(t), \quad \hat{u}(0) = \hat{u}^0, \quad \hat{u}'(0) = \hat{u}^1, \tag{1}$$

об определении функции $\hat{u}(t) = \{u(t,x); u(t,l)\}$, $0 < x < l$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(0,l) \oplus \mathbb{C}$.

Уравнение (1) содержит операторные коэффициенты A, B и C, а также параметр $\gamma \geq 0$ — коэффициент внутреннего трения. Свойства данных операторов подробно изучены в [32] и будут использованы для изучения задачи о нормальных колебаниях.

Осуществим переход от задачи Коши (1) к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Можно показать, что

$$F := \gamma A + C = F^* \gg 0, \quad F^{-1} \in \mathcal{S}_\infty, \quad A_b := A + B = A_b^* \gg 0, \tag{2}$$

$$D(A_b) = D(A), \quad A_b^{-1} \in \mathcal{S}_\infty, \quad \lambda_k(A_b) = \lambda_k(A)[1 + o(1)]\,(k \to \infty). \tag{3}$$

Далее в (1) вводится новая неизвестная функция $\hat{v}(t)$ соотношениями

$$\frac{\hat{v}}{t} = -iA_b^{1/2}\hat{u}(t), \quad \hat{v}(0) = \hat{0}. \tag{4}$$

После дифференцирования (4) по t приходим взамен (1) к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{y}{t} + \mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{5}$$

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} F & iA_b^{1/2} \\ iA_b^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\mathcal{A}_0) := D(F) \oplus D(A_b^{1/2}), \tag{6}$$

$$y^0 := (\hat{u}^1; -iA_b^{1/2}\hat{u}^0)^t, \quad f_0(t) := (\hat{f}(t); 0)^t, \tag{7}$$

$$y(t) := (\hat{u}'(t); \hat{v}'(t))^t, \tag{8}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Здесь операторная матрица $\mathcal{A}_0$, заданная на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$, является аккретивным оператором, т.е.

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 y, y)_{\mathcal{H}^2} \geqslant 0, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{9}$$

и потому оператор $(-\mathcal{A}_0)$ является диссипативным. Однако, как выясняется, он не является максимальным диссипативным оператором, и это не позволяет применить к проблеме разрешимости задачи Коши (5) теорию сжимающих полугрупп операторов.

Для устранения этой проблемы осуществим переход от задачи (5) к дифференциальному уравнению первого порядка с операторным коэффициентом, являющимся генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы. С этой целью сначала в (5) осуществляется замена

$$y(t) = e^{at} z(t), \quad a > 0, \tag{10}$$

что приводит к задаче Коши

$$\frac{z}{t} + \mathcal{A}_a z = e^{-at} f_0(t) =: f_a(t), \quad z(0) = y(0) = y^0, \tag{11}$$

$$\mathcal{A}_a := \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I} = \begin{pmatrix} F_a & iA_b^{1/2} \\ iA_b^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \quad F_a := F + aI, \tag{12}$$

с равномерным аккретивным матричным оператором $\mathcal{A}_a$:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_a z, z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant \|z\|^2_{\mathcal{H}^2}, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0). \tag{13}$$

Далее для оператора $\mathcal{A}_a$ устанавливается следующий основной факт: Пусть $Q_a := A_b^{1/2} F_a^{-1/2}$, $\mathcal{D}(Q_a) = \mathcal{H}$, $Q_a^+ := F_a^{-1/2} A_b^{1/2}$, $\mathcal{D}(Q_a^+) = \mathcal{D}(A_b^{1/2})$. Тогда $Q_a^+ = Q_a^*|_{\mathcal{D}(A_b^{1/2})}$, $\overline{Q_a^+} = Q_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, оператор $\mathcal{A}_a$ допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$, имеющего следующие представления:

а) в форме Шура-Фробениуса:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ_a F_a^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a & 0 \\ 0 & aI + Q_a Q_a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iF_a^{-1/2} Q_a^* \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{14}$$

б) с симметричными крайними множителями:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ_a^* \\ iQ_a & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{15}$$

при этом

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}igl\{z = (\hat{z}_1; \hat{z}_2)^t \in \mathcal{H}^2 : \hat{z}_1 + iF_a^{-1/2} Q_a^* \hat{z}_2 \in \mathcal{D}(F_a) \mathcal{B}igr\}, \tag{16}$$

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} F_a(\hat{z}_1 + iF_a^{-1/2}Q_a^*\hat{z}_2) \\ iQ_aF_a^{1/2}\hat{z}_1 + a\hat{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_a^{1/2}(F_a^{1/2}\hat{z}_1 + iQ_a^*\hat{z}_2) \\ iQ_aF_a^{1/2}\hat{z}_1 + a\hat{z}_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Спектральная задача о нормальных колебаниях стержня

$$\mathcal{A}z = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{18}$$

получается из однородной задачи

$$\frac{z}{t} + \mathcal{A}z = f_a(t), \quad z(0) = y^0, \tag{19}$$

если ее решения искать в виде

$$z(t) = z\exp(-\lambda t), \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{20}$$

3^0. *Исследование спектральной задачи.*

Ниже будут исследованы общие свойства решений спектральной задачи (18).

Определение 1. Назовем матрицу $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_a}$ операторной матрицей, ассоциированной с исходной начально-краевой задачей о малых поперечных колебаниях вязкоупругого стержня.

Определение 2. Задачей о нормальных колебаниях вязкоупругого стержня назовем задачу (18) на собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

Как будет видно из дальнейшего, задача (18) эквивалентна задаче на собственные значения для операторного пучка, являющегося обобщением квадратичного пучка задачи, возникающего из проблемы (1).

В работе изучены некоторые свойства оператора $\mathcal{A}$ и обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$. В частности, имеет место

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ и*

$$\|\mathcal{A}^{-1}\| \leqslant a^{-1}. \tag{21}$$

Спектр $\sigma(A)$ оператора $\mathcal{A}$ расположен в области $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq a\}$, а его собственные значения - в области

$$\operatorname{Re}\lambda > a, \tag{22}$$

причем точка $\lambda = a$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство леммы основано на свойстве равномерной аккретивности (см. [32]) оператора $\mathcal{A}$. □

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \{a + \gamma^{-1}\} \cup \{\infty\}. \tag{23}$$

□

Дальнейшее исследование свойств решений задачи (18) основано на свойстве $\mathcal{J}$-самосопряженности матричного оператора $\mathcal{A}^{-1}$ при

$$\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I; -I), \tag{24}$$

а потому и оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 3. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ локализован на положительной полуоси $\lambda > a$, за исключением возможного конечного числа невещественных конечнократных собственных значений, расположенных в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > a$ симметрично относительно вещественной оси.*

Доказательство. Свойство $\mathcal{J}$-симметрии оператора $\mathcal{A}^{-1}$ непосредственно следует из представления

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} F_a^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -ia^{-1}Q_a & I \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (I + a^{-1}Q_a^*Q_a)^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -ia^{-1}Q_a^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_a^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \tag{25}$$
$$\begin{pmatrix} F_a^{-1/2}(I + a^{-1}Q_a^*Q_a)^{-1}F_a^{-1/2} & -ia^{-1}F_a^{-1/2}(I + a^{-1}Q_a^*Q_a)^{-1}Q_a^* \\ -ia^{-1}Q_a(I + a^{-1}Q_a^*Q_a)^{-1}F_a^{-1/2} & a^{-1}(I + a^{-1}Q_aQ_a^*)^{-1} \end{pmatrix},$$

которое проверяется непосредственно.

Так как оператор $\mathcal{A}^{-1}$ ограничен и определен на всем пространстве $\mathcal{H}$, то он $\mathcal{J}$-самосопряжен. Следовательно, обратный ему оператор $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$ также $\mathcal{J}$-самосопряжен, и потому спектр $\sigma(\mathcal{A})$ расположен симметрично относительно вещественной оси и притом в области $\mathrm{Re}\lambda \geqslant a$ (лемма 1).

Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ имеет не более конечного числа невещественных собственных значений. Можно показать, что матричный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет компактные компоненты $\mathcal{A}_{11}^{(-1)}$, $\mathcal{A}_{12}^{(-1)}$, $\mathcal{A}_{21}^{(-1)} = -(\mathcal{A}_{12}^{(-1)})^*$ и компоненту $\mathcal{A}_{22}^{(-1)}$, которая является ограниченным положительно определенным оператором. В частности, в силу свойства $\mathcal{A}_{12}^{(-1)} \in \mathcal{S}_\infty$ по известной теореме Х. Лангера (см., например, [9], гл. 3, §5) получаем, что $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет инвариантную дуальную пару подпространств $\{\mathcal{L}+;\mathcal{L}-\}$. Пусть $K = K_+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — угловой оператор инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$. Тогда $\|K\| \leqslant 1$

$$\mathcal{L}_+ = \{(\hat{v}; K\hat{v})^t \in \mathcal{H}^2 : \hat{v} \in \mathcal{H}\}. \tag{26}$$

Так как $\mathcal{A}^{-1}y \in \mathcal{L}_+$ для любого $y = (\hat{v}; K\hat{v})^t \in \mathcal{L}_+$, то

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}^{(-1)}\hat{v} + & \mathcal{A}_{12}^{(-1)}K\hat{v} \\ \mathcal{A}_{21}^{(-1)}\hat{v} + & \mathcal{A}_{22}^{(-1)}K\hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z} \\ K\hat{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+, \tag{27}$$

и потому

$$K\mathcal{A}_{11}^{(-1)}\hat{v} + K\mathcal{A}_{12}^{(-1)}K\hat{v} = \mathcal{A}_{21}^{(-1)}\hat{v} + \mathcal{A}_{22}^{(-1)}K\hat{v}, \quad \hat{v} \in \mathcal{H}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}_{22}^{(-1)}$ имеет ограниченный обратный, отсюда следует, что

$$K = (\mathcal{A}_{22}^{(-1)})^{-1}(K\mathcal{A}_{11}^{(-1)} + K\mathcal{A}_{12}^{(-1)}K - \mathcal{A}_{21}^{(-1)}) \in \mathcal{S}_\infty. \tag{28}$$

Следовательно, дуальная пара $\{\mathcal{L}_+;\mathcal{L}_-\}$ инвариантных подпространств принадлежит классу h, $\mathcal{A} \in (H)$ и по теореме из [9],гл.3, п.5 получаем, что невещественный спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$, а потому и оператора $\mathcal{A}$, состоит из конечного числа конечнократных собственных значений; при этом выполнены и другие утверждения теоремы из [9],гл.3, п.5. Согласно утверждениям леммы 1, все эти собственные значения расположены в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > a$. $\square$

Следствие 1. *Если $\|K\| < 1$ (см.* (28)*), то оператор $\mathcal{A}$ подобен самосопряженному оператору и потому $\sigma(\mathcal{A}) \subset (a, +\infty)$.*

Теорема 1. *Задача* (18) *имеет (в качестве части спектра) счетное множество $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ положительных конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой $+\infty$. Этим собственным значениям отвечает множество собственных элементов $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty$, $\quad z_k^+ := (\hat{z}_{1k}^+; \hat{z}_{2k}^+)^t \in \mathcal{H}^2$, такое, что множество проекций $\{\hat{z}_{1k}^+\}_{k=1}^\infty$ на пространство $\mathcal{H}$ образует базис Рисса в $\mathcal{H}$ с точностью до конечного дефекта (т. е. ортогональное дополнение к элементам $\hat{z}_{1k}^+$, $k \in \mathbb{N}$, есть конечномерное подпространство в $\mathcal{H}$). Этот базис Рисса является p_0-базисом (с конечным дефектом) в $\mathcal{H}$ при $p_0 > 1/4$.*

Доказательство. Любой оператор и обратный ему имеют взаимно обратные собственные значения и одни и те же собственные элементы. Поэтому достаточно установить для оператора $\mathcal{A}^{-1}$ существование счетного множества положительных конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой $\mu = 0$ и указанными выше свойствами собственных элементов. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим максимальное неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{H}^2$, введенные при доказательстве леммы 3. Подпространство $\mathcal{L}_+$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^{-1}$ и этому подпространству отвечает угловой оператор $K = K_+$. Докажем, что сужение $\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}$ оператора $\mathcal{A}^{-1}$ на подпространство $\mathcal{L}_+$ является компактным оператором, действующим в $\mathcal{L}_+$.

Действительно, из (27) следует, что оператор $\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}$ действует на любой элемент $y = (\hat{v}; K\hat{v})^t \in \mathcal{L}_+$ по закону

$$\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+} y = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_{11}^{(-1)} + \mathcal{A}_{12}^{(-1)}K)\hat{v} \\ (\mathcal{A}_{21}^{(-1)} + \mathcal{A}_{22}^{(-1)}K)\hat{v} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Пусть $P_+\big|_{\mathcal{L}_+}$ — сужение на $\mathcal{L}_+$ ортопроектора P_+, действующего по закону $P_+y = \hat{v}$ для любого $y = (\hat{v}; \hat{w})^t \in \mathcal{H}^2$. Поскольку $\mathcal{L}_+$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^{-1}$, из (29) следует, что

$$P_+\big|_{\mathcal{L}_+} \mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+} = P_+\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+} = (\mathcal{A}_{11}^{(-1)} + \mathcal{A}_{12}^{(-1)}K)P_+\big|_{\mathcal{L}_+}. \tag{30}$$

Так как $P_+\big|_{\mathcal{L}_+}$ отображает гомеоморфно подпространство $\mathcal{L}_+$ на $\mathcal{K}^+ = \mathcal{H}$ (см., например, [8], стр. 37), из (30) получаем, что оператор $\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}$ подобен оператору $\mathcal{A}_{11}^{(-1)} + \mathcal{A}_{12}^{(-1)}K$, точнее

$$\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+} = (P_+\big|_{\mathcal{L}_+})^{-1}(\mathcal{A}_{11}^{(-1)} + \mathcal{A}_{12}^{(-1)}K)(P_+\big|_{\mathcal{L}_+}). \tag{31}$$

Далее, в силу компактности операторов $\mathcal{A}_{11}^{(-1)}$, $\mathcal{A}_{12}^{(-1)}$ и ограниченности оператора K оператор $\mathcal{A}_{11}^{(-1)} + \mathcal{A}_{12}^{(-1)}K$ компактен. Следовательно, оператор $\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}$ также компактен, причем $\mathcal{L}_+$ является неотрицательным инвариантным подпространством класса h^+ (см. формулу (28) и соответствующее утверждение $\{\mathcal{L}_+; \mathcal{L}_-\} \in h$ в лемме 3). Значит, нейтральные элементы подпространства $\mathcal{L}_+$ образуют конечномерное линейное подпространство $\mathcal{L}_+^0$, которое также инвариантно относительно $\mathcal{A}^{-1}$. Пусть $\sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}) = \{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда подпространство $\mathcal{L}_+$ может быть представлено в виде прямой суммы двух инвариантных подпространств (относительно оператора $\mathcal{A}^{-1}$) следующего вида:

$$\mathcal{L}_+ = \operatorname{span}\{\mathcal{L}_\nu(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}) : \nu \in \sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+^0})\} \dotplus \mathcal{L},$$
$$\sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}}) = \sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}) \setminus \sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+^0}).$$

Здесь через $\mathcal{L}_\nu(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+})$ обозначено корневое подпространство оператора $\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}$, отвечающее собственному значению ν, а символ span употребляется для обозначения линейной оболочки элементов. Поскольку

$$\mathcal{L}_+^0 \subset \operatorname{span}\{\mathcal{L}_\nu(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+}) : \nu \in \sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+^0})\},$$

то подпространство $\mathcal{L}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, индуцированным индефинитной метрикой. Оно имеет конечную коразмерность

$$\dim \operatorname{span}\{\mathcal{L}_\nu(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+} : \nu \in \sigma(\mathcal{A}^{-1}\big|_{\mathcal{L}_+^0})\}$$

в подпространстве $\mathcal{L}_+$. Следовательно, существует базис Рисса $\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, $\quad z_k^+ = (\hat{z}_{1k}^+; \hat{z}_{2k}^+)^t \in \mathcal{H}^2$, состоящий из собственных элементов оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в $\mathcal{L}$, и этот базис имеет ту же конечную коразмерность в подпространстве $\mathcal{L}_+$. Проекции $\{\hat{z}_{1k}^+\}_{k=1}^{\infty}$ на $\mathcal{H}$ этого базиса тоже образует базис Рисса с тем же конечным дефектом в $\mathcal{H}$, так как оператор $P_+\big|_{\mathcal{L}_+}$ отображает гомеоморфно $\mathcal{L}_+$ на $\mathcal{H}$.

Докажем теперь, что базис Рисса $\{\hat{z}_{1k}^+\}_{k=1}^\infty$ является p_0-базисом для $p_0 > 1/4$. С этой целью рассмотрим уравнение (28). Коэффициенты $\mathcal{A}_{ij}^{(-1)}$ в скобках справа являются компактными операторами некоторых классов $\mathcal{S}_p$. Действительно, оператор $\mathcal{A}_{11}^{(-1)}$ принадлежит тому же классу $\mathcal{S}_p$, что и оператор A_a^{-1}, т. е. оператор A^{-1}, так как $A_a^{-1} = A^{-1}(I + aA^{-1})^{-1}$. Согласно ассимптотической формуле ([32]) имеем $A^{-1} \in \mathcal{S}_p$ для $p > p_{11} = 1/4$. Для операторов $\mathcal{A}_{12}^{(-1)}$ и $\mathcal{A}_{21}^{(-1)}$ получаем, что соответствующие числа

$$p = p(\mathcal{A}_{12}^{(-1)}) = p(\mathcal{A}_{21}^{(-1)}) = p(F_a^{-1/2}) = p(A^{-1/2}) = 1/2.$$

Отсюда следует, что скобка, а потому и правая часть в (28), т. е. оператор $K = K_+$, принадлежит классу $\mathcal{S}_p$ при $p > 1/2$.

Значит, элементы $\{\hat{z}_k^+\}_{k=1}^\infty$ образуют p-базис в подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}^2$ для $p > 1/2$ (общее рассуждение такого вида см. в [9], гл.4, § 3). Осталось лишь сослаться на утверждение из [8], стр. 55, согласно которому проекции элементов $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty$ на $\mathcal{H}$, т. е. элементы $\{\hat{z}_{1k}^+\}_{k=1}^\infty$, образуют p_0-базис в своей замкнутой линейной оболочке (т. е. с точностью до конечного дефекта в $\mathcal{H}$) при $p > p_0 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. □

Теорема 1 характеризует свойства собственных элементов $\{\hat{z}_k^+\}_{k=1}^\infty$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой ∞. Так как точка $a + \gamma^{-1} \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$, то этой точке также отвечает ветвь собственных значений, имеющая своим пределом эту точку. Это устанавливает

Теорема 2. *Задача* (18) *имеет (в качестве части спектра) счетное множество положительных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k^- > a > 0$, *с единственной предельной точкой* $\lambda = \gamma^{-1} + a$. *Собственные элементы* $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty$, $z_k^- = (\hat{z}_{1k}^-; \hat{z}_{2k}^-)^t \in \mathcal{H}^2$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$, *обладают следующим свойством: их проекции* $\{\hat{z}_{2k}^-\}_{k=1}^\infty$ *на пространстве* $\mathcal{H}$ *образует базис Рисса с конечным дефектом в пространстве* $\mathcal{H}$. *Этот базис Рисса является* p_0*-базисом (с конечным дефектом) в* $\mathcal{H}$ *при* $p > p_0 = 1/4$.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и для теоремы 1, однако не для максимального неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$, инвариантного относительно оператора $\mathcal{A}^{-1}$, а для максимального неположительного инвариантного подпространства $\mathcal{L}_-$.

Общий итог применения индефинитного подхода к задаче (18) подводит

Теорема 3. *Для оператора* $\mathcal{A}$ *задачи* (18) *выполнены следующие свойства.*

1^0. $\dim(\mathcal{F}(\mathcal{A})/\mathcal{F}_0(\mathcal{A})) < \infty$.

2^0. *Если выполнено условие* (32), *то* $\mathcal{H}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{A})$, *т. е. замыкание линейной оболочки корневых элементов оператора* $\mathcal{A}$ *совпадает со всем пространством* $\mathcal{H}^2$.

3^0. $\mathcal{H}^2 = \mathcal{F}_0(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям оператора* $\mathcal{A}$, *не имеют присоединенных элементов, т. е.* $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \mathcal{K}er(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$. *(Напомним, что оператор* $\mathcal{A}$ *может иметь не более конечного числа невещественных собственных значений.)*

4^0. *Если* $\mathcal{H}^2 = \mathcal{F}_0(\mathcal{A})$ *(соответственно* $\mathcal{H}^2 = \mathcal{F}(\mathcal{A})$*), то существует почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированный базис Рисса, составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора* $\mathcal{A}$.

5^0. *Если* $\mathcal{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}^2$, *то* $\mathcal{J}$*-ортонормированный базис в пространстве* $\mathcal{H}^2$, *образованный собственными элементами оператора* $\mathcal{A}$, *существует тогда и только тогда, когда* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$.

6^0. *Упомянутые базисы могут быть выбраны как* p*-базисы при* $p > p_0 = 1/2$.

Доказательство этой теоремы основано на теореме Т. Я. Азизова и И. С. Йохвидова (см. [9], где введены обозначения $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ для замыкания линейной оболочки корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}_0(\mathcal{A})$ для замыкания линейной оболочки собственных элементов оператора $\mathcal{A}$). Используется также следующее доказанное свойство: число $\lambda = a+\gamma^{-1}$ может быть не более чем конечнократным собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Если выполнено условие

$$\mathcal{K}er(\gamma B + \gamma^{-1} I - C) = \{0\}, \tag{32}$$

то $\lambda = a+\gamma^{-1}$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

Докажем свойства $1^0 - 6^0$.

1^0. Как установлено выше (лемма 3), оператор $\mathcal{A}$ является $\mathcal{J}$-самосопряженным оператором класса (h), и его спектр имеет две точки сгущения: $a+\gamma^{-1}$ и $+\infty$. Следовательно, согласно утверждению б) теоремы из [9], с.271 имеем свойство 1^0.

2^0. Далее, для оператора $\mathcal{A}$ множество $s^0(\mathcal{A})$ критических точек пусто. Действительно, вещественные точки $\lambda \neq a+\gamma^{-1}$ могут быть лишь конечнократным изолированными собственными значениями и потому они имеют невырожденные ядра $\mathcal{K}er(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})$. Можно показать, что точка $\lambda = a+\gamma^{-1} \in \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ может быть лишь не более чем конечнократным (неизолированным) собственным значением оператора $\mathcal{A}$, а при выполнении условия (32) эта точка не является собственным значением. Отсюда следует, что множество $\text{span}\{\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{A}) : \lambda \in s^0(\mathcal{A})\} = \emptyset$, т. е. оно является невырожденным подпространством. Поэтому согласно утверждению г) теоремы из [9], с. 271, утверждение 2^0 данной теоремы справедливо.

3^0. Так как $s^0(\mathcal{A}) = \emptyset$, то утверждение 3^0 следует из утверждения в) теоремы из [9], с. 271.

$4^0 - 5^0$. Эти утверждения — в точности утверждения д) и е) теоремы из [9], с. 271.

6^0. Как было установлено в процессе доказательства теорем 1 и 2, угловые операторы $K_\pm$ максимальных инвариантных подпространств $\mathcal{L}_\pm$ оператора $\mathcal{A}^{-1}$ (и оператора $\mathcal{A}$) принадлежат классу $\mathcal{S}_p$ при $p > 1/2$. Следовательно, утверждение 6^0 есть утверждение ж) теоремы из [9], с. 271. $\square$

Устанавливается, что решения спектральной задачи (18) для матричного оператора $\mathcal{A}$ с неограниченными операторными коэффициентами тесно связаны с решениями спектральной задачи для операторного пучка $L(\lambda)$ с ограниченными операторными коэффициентами, близкого к известному операторному пучку С. Г. Крейна, возникшему в задаче о малых движениях вязкой жидкости сосуде и породившему многочисленные исследования операторных пучков этого типа (см. [21], [22], [16] – [17]).

Теорема 4. *Пусть λ_0 — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и $z^0, z^1, \ldots, z^k$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов, отвечающая этому собственному значению, $z^j = (\hat{z}_1^j; \hat{z}_2^j)^t$, $j = \overline{0,k}$. Тогда $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k$, $\hat{\varphi}_j = F^{1/2}\hat{z}_1^j$, $F = \gamma A + C$ образуют цепочку из собственного и присоединенных к нему элементов (в смысле М. В. Келдыша) для собственного значения $\lambda_0 - a$ операторного пучка*

$$L(\lambda) := I - \lambda F^{-1} - \lambda^{-1}\tilde{Q}^*\tilde{Q}, \quad \tilde{Q} := A_b^{1/2} F^{-1/2}. \tag{33}$$

Обратно, каждой цепочке $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k$ из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающей собственному значению $\lambda_0 - a$, соответствует цепочка корневых элементов $z^0, z^1, \ldots, z^k$ оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению λ_0; при этом

$$z^j = \begin{pmatrix} F^{-1/2}\hat{\varphi}_j \\ i\tilde{Q}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j+l}(\lambda_0 - a)^{l-1-j}\hat{\varphi}_l \end{pmatrix}, \ j = \overline{0,k}. \tag{34}$$

Доказательство. Пусть $z^0 = (\hat{z}_1^0; \hat{z}_2^0)^t$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ_0. Тогда имеем

$$\begin{aligned} &F_a^{1/2}(F_a^{1/2}\hat{z}_1^0 + iQ_a^*\hat{z}_2^0) = \lambda_0\hat{z}_1^0, \quad \hat{z}_1^0 \in \mathcal{D}(F_a^{1/2}), \\ &iQ_aF_a^{1/2}\hat{z}_1^0 + a\hat{z}_2^0 = \lambda_0\hat{z}_2^0, \ Q_a := A_b^{1/2}F_a^{-1/2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Так как $\lambda_0 \neq a$ (лемма 1), то

$$\hat{z}_2^0 = \frac{i}{\lambda_0 - a} Q_a F_a^{1/2} \hat{z}_1^0. \tag{36}$$

Далее, так как $\hat{z}_1^0 \in \mathcal{D}(F_a^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2})$, то

$$\hat{z}_1^0 = F^{-1/2} \hat{\varphi}_0, \quad \hat{\varphi}_0 \in \mathcal{H}. \tag{37}$$

Из (37), (36) и первого уравнения (35) получаем

$$F_a^{1/2} F^{-1/2} \hat{\varphi}_0 - \frac{1}{\lambda_0 - a} Q_a^* Q_a F_a^{-1/2} F^{-1/2} \hat{\varphi}_0 = \lambda_0 F_a^{-1/2} F^{-1/2} \hat{\varphi}_0. \tag{38}$$

Перепишем (38) в виде

$$\begin{aligned} &(F_a^{1/2} F^{-1/2} - a F_a^{-1/2} F^{-1/2}) \hat{\varphi}_0 - \frac{1}{\lambda_0 - a} Q_a^* Q_a F_a^{-1/2} F^{-1/2} \hat{\varphi}_0 - \\ &- (\lambda_0 - a) F_a^{-1/2} F^{-1/2} \hat{\varphi}_0 = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} &F_a^{1/2} F^{-1/2} - a F_a^{-1/2} F^{-1/2} = (F_a - aI) F_a^{-1/2} F^{-1/2} = F F_a^{-1/2} F^{-1/2} = \\ &= F^{1/2} F_a^{-1/2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Так как $F_a^{1/2} F^{-1/2}$ — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, применим к (39) оператор $F_a^{1/2} F^{-1/2} = (F^{1/2} F^{-1/2})^{-1}$; получим

$$L(\lambda_0 - a) \hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_0 - (\lambda_0 - a) F^{-1} \hat{\varphi}_0 - \frac{1}{\lambda_0 - a} \tilde{Q}^* \tilde{Q} \hat{\varphi}_0 = 0, \tag{41}$$

где $\tilde{Q} = A_b^{1/2} F^{-1/2}$, а $\tilde{Q}^*$ — сопряженный к нему оператор. В самом деле, согласно результатам [32] оператор Q_a^* является расширением по непрерывности оператора $Q_a^+ = F_a^{-1/2} A_b^{1/2}$ с $\mathcal{D}(A_b^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(F_a^{1/2})$ на все пространство $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что оператор $F_a^{1/2} F^{-1/2} Q_a^*$ является расширением по непрерывности (замыканием) оператора $F_a^{1/2} F^{-1/2} Q_a^+ = F_a^{1/2} F^{-1/2} F_a^{-1/2} A_b^{1/2} = F^{-1/2} A_b^{1/2} =: \tilde{Q}^+$, при этом $\overline{\tilde{Q}^+} = \tilde{Q}^*$.

Уравнение (41) показывает, что элемент $\hat{\varphi}_0 = F^{-1/2} \hat{z}_1^0$ является собственным элементом операторного пучка (33), отвечающим собственному значению $\lambda_0 - a$. Нетрудно проследить, что от задачи (41) путем обратных переходов и замены (37) можно вернуться к задаче (35).

Аналогичные рассуждения поводятся и для присоединенных элементов задачи (18), т. е. оператора $\mathcal{A}$. Пусть $z^k = (\hat{z}_1^k; \hat{z}_2^k)^t$ — присоединенный элемент с номером k для собственного элемента z^0 и собственного значения λ_0 оператора $\mathcal{A}$. Тогда, согласно определению присоединенных элементов оператора, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} z^0 - \lambda_0 z^0 = 0, \quad \mathcal{A} z^1 - \lambda_0 z^1 - z^0 = 0, \\ &\ldots, \quad \mathcal{A} z^k - \lambda_0 z^k - z^{k-1} = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Последнее уравнение (42) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} &F_a^{1/2} (F_a^{1/2} \hat{z}_1^k + i Q_a^* \hat{z}_2^k) - \lambda_0 \hat{z}_1^k - \hat{z}_1^{k-1} = 0, \\ &i Q_a F_a^{1/2} \hat{z}_1^k + a \hat{z}_2^k - \lambda_0 \hat{z}_2^k - \hat{z}_2^{k-1} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Из второго уравнения получаем

$$\hat{z}_2^k = \frac{1}{\lambda_0 - a} (i Q_a F_a^{1/2} \hat{z}_1^k - \hat{z}_2^{k-1}). \tag{44}$$

Осуществим в системе уравнений (42) замены

$$\hat{z}_1^j = F^{-1/2}\hat{\varphi}_j, \quad \hat{\varphi}_j \in \mathcal{H}, \quad j = \overline{0,k}. \tag{45}$$

Учитывая (44) и соответствующие связи при $j < k$, в том числе (36), по индукции выводим, что

$$\hat{z}_2^0 = \frac{i}{\lambda_0 - a}\tilde{Q}\hat{\varphi}_0, \quad \hat{z}_2^j = i\tilde{Q}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{j+l}(\lambda_0 - a)^{l-1-j}\hat{\varphi}_l, \quad j = \overline{1,k}. \tag{46}$$

Далее, в первом уравнении (33) проводим те же преобразования, которые были осуществлены выше в процессе перехода от первого уравнения (35) к (41). С учетом (46) в итоге получаем

$$\begin{aligned}&[\hat{\varphi}_k - (\lambda_0 - a)F^{-1}\hat{\varphi}_k - (\lambda_0 - a)^{-1}\tilde{B}\hat{\varphi}_k] + [-F^{-1}\hat{\varphi}_{k-1} + (\lambda_0 - a)^{-2}\tilde{B}\hat{\varphi}_{k-1}]-\\ &- \tilde{B}\sum_{l=0}^{k-2}(-1)^{l+k}(\lambda_0 - a)^{l-1-k}\hat{\varphi}_l = 0, \\ &\tilde{B} := \tilde{Q}^*\tilde{Q}.\end{aligned} \tag{47}$$

Это уравнение в терминах операторного пучка $L(\lambda)$ из (33) может быть переписано в виде

$$L(\lambda_0 - a)\hat{\varphi}_k + L'(\lambda_0 - a)\hat{\varphi}_{k-1}\sum_{j=2}^{k}(j!)^{-1}L^{(j)}(\lambda_0 - a)\hat{\varphi}_{k-j} = 0. \tag{48}$$

Согласно определению М. В. Келдыша (см., например, [25], с. 61), это означает, что элементы $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_k$ образуют цепочку из собственного и присоединенных к нему элементов, отвечающую собственному значению $\lambda_0 - a$ пучка $L(\lambda)$.

Все проведенные преобразования можно обратить, т. е. вернуться от задачи (48) к (42). Формулы (34) следуют из (45), (46). □

Из теоремы 4 следует, что некоторые свойства спектра и корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ можно установить, изучая спектральную задачу для операторного пучка $L(\lambda)$ из (33). Отметим, что этот пучок имеет в точности тот же вид, что в известной проблеме С. Г. Крейна (см. [21], [22], [18]), однако здесь оператор $\tilde{Q}$ не является компактным. Эта аналогия позволяет применить к спектральной задаче для $L(\lambda)$ методы, разработанные ранее для другой проблемы. Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 4. *Собственные значения оператора $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \frac{1}{\pi^2 k^2}\mathcal{B}igl(\int_0^l \mathcal{B}igl(\frac{P(x)}{E(x)J(x)}\mathcal{B}igr)^{1/2}\,dx\mathcal{B}igr)^2[1 + o(1)]\,(k \to \infty). \tag{49}$$

Доказательство. Для установления формулы (48) применяются хорошо разработанные методы, в том числе и вариационные, применимые как для одномерных, так и многомерных задач (см., например, [19], [11], [12]). □

Теорема 5. *Для оператора $\mathcal{A}$ задачи* (18) *выполнены следующие свойства.*

1^0. *Невещественные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, а также те вещественные собственные значения, которым наряду с собственными отвечают также присоединенные элементы, расположены в сегменте*

$$M := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda - a \geqslant (2\|F^{-1}\|^{-1}), |\lambda - a| \leqslant 2\|\tilde{Q}\|^2\} \tag{50}$$

комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Этому конечному множеству собственных значений отвечают нейтральные собственные элементы оператора $\mathcal{A}$.

Обратно, если выполнено условие (32), *то собственные значения, которым отвечают нейтральные собственные элементы оператора* $\mathcal{A}$, *локализированы в сегменте* M *и, кроме того, вещественным собственным значениям из этого сегмента отвечают и присоединенные элементы оператора* $\mathcal{A}$.

2^0. *Собственные значения* λ_k^+, *отвечающие позитивным собственным элементам из неотрицательного подпространства* $\mathcal{L}_+$, *инвариантного для оператора* $\mathcal{A}$, *расположены на промежутке* $(a + 2\|\tilde{Q}\|^2, +\infty)$. *Соответственно собственные значения* λ_k^-, *отвечающие негативным собственным элементам из неположительного инвариантного подпространства* $\mathcal{L}_-$, *расположены на промежутке* $(a, a + (2\|F^{-1}\|)^{-1})$.

3^0. *Если для операторов* F^{-1} *и* $\tilde{Q}$ *выполнено условие*

$$4\|F^{-1}\| \cdot \|\tilde{Q}\|^2 < 1, \tag{51}$$

то оператор $\mathcal{A}$ *не имеет нейтральных собственных элементов и, следовательно, он не имеет невещественных собственных значений, а также присоединенных элементов. В этом случае объединение нормированных собственных элементов* $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+$ *и* $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}_-$ *образует* $\mathcal{J}$*-ортогональный базис в пространстве* $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

4^0. *Для собственных значений* λ_k^+ *и* λ_k^- *имеют место двусторонние оценки*

$$\lambda_k(F) - 2\|\tilde{Q}\|^2 \leqslant \lambda_k^+ - a \leqslant \lambda_k(F), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

$\gamma\lambda_k(A) + c_- \leqslant \lambda_k(F) \leqslant \gamma\lambda_k(A) + c_+$, *где* $c_\pm$ — *числа из* [32] *для оператора* C, *а также асимптотические формулы*

$$\lambda_k^+ = \lambda_k(F) + O(1) = \gamma\lambda_k(A) + O(1) \quad (k \to \infty), \tag{53}$$

$$\lambda_k^- = a + \gamma^{-1} + \gamma^{-1}\lambda_k(A^{-1/2}BA^{-1/2})[1 + o(1)] \quad (k \to \infty). \tag{54}$$

Доказательство. Свойства $1^0 - 4^0$ докажем по тому же плану, что и в [18], с. 286-289.

1^0. Пусть λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, а $z^0 = (\hat{z}_1^0; \hat{z}_2^0)^t$ — соответствующий собственный элемент. Тогда, согласно теореме 4, элемент $\hat{\varphi}_0 = F^{-1/2}\hat{z}_1^0$ является собственным элементом оператора $L(\lambda_0 - a)$ (см. (41)). Поэтому

$$(\lambda_0 - a)^2(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0) - (\lambda_0 - a)(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0) + (\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0) = 0. \tag{55}$$

Так как $\lambda_0 - a$ — невещественное число, то выполнено неравенство

$$(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)^2 - 4(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)(\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)) < 0, \tag{56}$$

и потому для корня $\lambda_0 - a$ квадратного уравнения (55) имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_0 - a|^2 &= \frac{(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)^2 - [(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)^2 - 4(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)(\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)]}{[2(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)]^2} = \\ &= \frac{(\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)}{(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)} < \frac{4(\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)^2}{(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)^2} \leqslant 4\|\tilde{B}\|^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Далее, для того же уравнения имеем

$$\mathrm{Re}\lambda_0 - a = \mathrm{Re}(\lambda_0 - a) = \frac{(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)}{2(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)} \geqslant (2\|F^{-1}\|)^{-1}. \tag{58}$$

Отсюда и из (57) получаем, что невещественные λ_0 принадлежат множеству M из (50), если заметить, что $\|\tilde{B}\| = \|\tilde{Q}\|^2$.

Пусть теперь λ_0 является вещественным собственным значением оператора $\mathcal{A}$, причем собственному элементу z^0 отвечает присоединенный элемент z^1. Тогда по теореме 4 собственный элемент $\hat{\varphi}_0$ операторного пучка $L(\lambda - a)$ имеет присоединенный элемент $\hat{\varphi}_1$, т. е.

выполнены уравнения

$$
\begin{aligned}
&[I-(\lambda_0-a)F^{-1}-(\lambda_0-a)\tilde{B}]\hat{\varphi}_0=0,\\
&[I-(\lambda_0-a)F^{-1}-(\lambda_0-a)\tilde{B}]\hat{\varphi}_1=(F^{-1}-(\lambda_0-a)^{-2}\tilde{B})\hat{\varphi}_0.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Следовательно, справедливо утверждение (55), а также соотношение

$$
(F^{-1}\hat{\varphi}_0\,\hat{\varphi}_0)-(\lambda_0-a)^{-2}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)=0, \tag{60}
$$

поскольку

$$
(L(\lambda_0-a)\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_0)=(\hat{\varphi}_1,L(\lambda_0-a)\hat{\varphi}_0)=(\hat{\varphi}_1,\hat{0})=0.
$$

Отсюда получаем

$$
\frac{(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_0)}{2(F^{-1}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)}=\lambda_0-a=\frac{2(\tilde{B}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)}{(\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)}
$$

и потому

$$
(2\|F^{-1}\|)^{-1}\leqslant\lambda_0-a=|\lambda_0-a|\leqslant 2\|\tilde{B}\|,
$$

т. е. число $\lambda_0\in M$.

Перед доказательством обратного утверждения заметим, что невещественным собственным значениям $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ отвечают нейтральные собственные элементы z^0. Если собственный элемент z^0 отвечает собственному значению $\lambda_0\in\mathbb{R}$ и имеет присоединенный элемент z^1, то выполнено свойство (60) и снова (с учетом первой формулы (46)) имеем

$$
(\mathcal{J}z^0,z^0)_{\mathcal{H}^2}=(F^{-1}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)-(\lambda_0-a)^{-2}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)=0, \tag{61}
$$

т. е. z^0 — нейтральный собственный элемент.

Предположим теперь, что z^0 является нейтральным собственным элементом оператора $\mathcal{A}$ и отвечает собственному значению λ_0. Если $\lambda_0\neq\overline{\lambda_0}$, то выполнены неравенства (57), (58) и потому $\lambda_0\in M$. Если $\lambda_0\in\mathbb{R}$, то достаточно убедиться, что второе уравнение (59) имеет нетривиальное решение $\hat{\varphi}_1$. Если выполнено условие (32), то точка $\lambda_0-a=\gamma^{-1}$ не является собственным значением операторного пучка $L(\lambda)$, поэтому второе уравнение (59) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}igl[\mathcal{B}igl(1-\frac{1}{(\lambda_0-a)\gamma}\mathcal{B}igr)I-((\lambda_0-a)F^{-1}+\\
&+(\lambda_0-a)^{-1}\tilde{V})\mathcal{B}igr]\hat{\varphi}_1=(F^{-1}-(\lambda_0-a)^{-2}\tilde{B})\hat{\varphi}_0,
\end{aligned}
\tag{62}
$$

где множитель при I не обращается в нуль, а выражение во вторых скобках есть компактный самосопряженный оператор.

По известной альтернативе Фредгольма уравнение (62) имеет нетривиальное решение $\hat{\varphi}_1$ тогда и только тогда, когда правая часть (62) ортогональна к решению $\hat{\varphi}_0$ однородного уравнения. Поскольку z^0 — нейтральный элемент, то выполнено свойство (61) и потому уравнение (62) имеет решение $\hat{\varphi}_1\neq 0$. Следовательно, элемент $z^1=(\hat{z}_1^1;\hat{z}_2^1)^t$, построенный по формулам (46) при $j=1$, является присоединенным к элементу z^0. Как установлено выше, отвечающее элементам z^0 и z^1 собственное значение $\lambda_0\in M$.

2^0. Пусть λ_0 — положительное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, отвечающее позитивному собственному элементу z^0 из инвариантного неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$. Тогда

$$
0<(\mathcal{J}z^0,z^0)_{\mathcal{H}^2}=(F^{-1}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)-(\lambda_0-a)^{-2}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0) \tag{63}
$$

и выполнено неравенство, противоположное неравенству (56).

Так как $\lambda_0-a>0$ (лемма 1), то с использованием (55) и (63) заключаем, что

$$
\begin{aligned}
&(\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)-2(\lambda_0-a)(F^{-1}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)=-(\lambda_0-a)(F^{-1}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0))+\\
&+(\lambda_0-a)^{-1}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0))=-(\lambda_0-a)[(F^{-1}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)-(\lambda_0-a)^{-2}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_0)]<0.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\lambda_0 - a > \frac{(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)}{2(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)} \geqslant (2\|F^{-1}\|)^{-1}. \tag{64}$$

Как было установлено выше, на промежутке $[a + (2\|F^{-1}\|)^{-1}, a + 2\|\tilde{B}\|]$ расположены те собственные значения λ_0 оператора $\mathcal{A}$, которым отвечают нейтральные собственные элементы. Поскольку элемент $z^0 = (F^{-1/2}\hat{\varphi}_0; i(\lambda_0 - a)^{-1}\tilde{Q}\hat{\varphi}_0)^t$ является позитивным по предположению, приходим к выводу, что $\lambda_0 \in (a + 2\|\tilde{B}\|, +\infty)$.

Доказательно второго утверждения в пункте 2^0 для собственных значений λ_k^-, которым отвечают негативные собственные элементы $z_k^- \in \mathcal{L}_-$, проводятся так же, как и выше для $\mathcal{L}_+$, и опирается на неравенство

$$\begin{aligned}&(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0) - 2(\lambda_0 - a)^{-1}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0) = \\ &= (\lambda_0 - a)[(F^{-1}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0) - (\lambda_0 - a)^{-2}(\tilde{B}\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0)] < 0.\end{aligned}$$

3^0. Из условия (51) следует, что $M = \emptyset$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений, каждый его собственный элемент дефинитен и потому не имеет присоединенных элементов. Значит, инвариантные подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ равномерно дефинитны, а потому базис, который образован собственными элементами оператора $\mathcal{A}$, является $\mathcal{J}$-ортонормированным в пространстве $\mathcal{H}^2$. (См. утверждение 5^0 теоремы 3).

4^0. Оценки (52) для операторного пучка $L(\lambda)$ выводятся в точности так же, как это сделано в [18], с. 300, для операторного пучка С. Г. Крейна; поэтому их вывод здесь не проводится. Асимптотическая формула (53) следует из (52), формулы $F = \gamma A + C$ и максиминимального принципа; при этом асимптотика $\lambda_k(A)$ определяется формулой из [32]. □

На базе доказанных свойств рассмотрим теперь вопрос о разложении решения исследуемой начально-краевой задачи в ряды Фурье по собственным элементам спектральной задачи.

Будем считать, что выполнены условие (51), обеспечивающее согласно теореме 5 существование J-ортогонального базиса в пространстве $\mathcal{H}^2$, а также условие (32). Элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+$ и $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}_-$ этого базиса являются собственными элементами оператора $\mathcal{A}$ и удовлетворяют следующим условиям $\mathcal{J}$-ортогональности

$$(\mathcal{J}z_k^+, z_j^+) =: [z_k^+, z_j^+] = \delta_{kj}, \quad [z_k^+, z_l^-] = 0, \quad [z_l^-, z_m^-] = -\delta_{lm}. \tag{65}$$

Эти свойства позволяют получить решения задачи Коши (19) в виде рядов Фурье по собственным элементам оператора $\mathcal{A}$.

Представим решение $z(t)$ задачи Коши

$$\frac{z}{t} + \mathcal{A}z = f_a(t), \quad z(0) = y^0, \tag{66}$$

в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^+(t) z_k^+ + \sum_{l=1}^{\infty} c_l^-(t) z_l^-, \tag{67}$$

где z_k^+ и z_l^- — элементы базиса (65), а функции $c_k^+(t)$ и $c_l^-(t)$ подлежат определению. Подставляя (67) в (66) и пользуясь формулами (65), приходим к следующим задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{c_k^+(t)}{t} + \lambda_k^+ c_k^+(t) = f_k^+(t) := e^{-at}[(\hat{f}(t); 0)^t, z_k^+], \quad c_k^+(0) = [y^0, y_k^+], \\ &k \in \mathbb{N}, \\ &\frac{c_l^-(t)}{t} + \lambda_l^- c_l^-(t) = -e^{-at}[(\hat{f}(t); 0)^t, z_l^-], \quad c_l^-(0) = -[y^0, y_l^-], \quad l \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы для неизвестных функций $c_k^+(t)$ и $c_l^-(t)$ и, следовательно, формулу для $z(t)$ и $y(t) = e^{at}z(t)$:

$$
\begin{aligned}
& y(t) = (\hat{u}'(t); \hat{v}'(t))^t, \quad \hat{v}'(t) = -iA_b^{1/2}\hat{u}(t), \\
& y(t) = e^{at}z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k^+ - a)t}[(\hat{u}_1; -iA_b^{1/2}\hat{u}^0)^t, z_k^+] - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k^- - a)t}[(\hat{u}_1; -iA_b^{1/2}\hat{u}^0)^t, z_l^-] + \\
& + \mathcal{B}igl\{\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^t e^{-(\lambda_k^+ - a)(t-s)}[(\hat{f}(s); 0)^t, z_k^+]\, ds - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_0^t e^{-(\lambda_k^- - a)(t-s)}[(\hat{f}(t); 0)^t, z_l^-]\, ds\mathcal{B}igr\} = \\
& =: y_+(t) + y_-(t) + y_0(t).
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Здесь каждое из трех слагаемых имеет ясный математический и физический смысл: $y_+(t)$ описывает свободное движение вязкоупругого стержня, обусловленные начальными условиями из неотрицательного (в данном случае положительного) подпространства $\mathcal{L}_+$, инвариантного для оператора $\mathcal{A}$, $y_-(t)$ — такие же движения с начальными условиями из $\mathcal{L}_-$, а $y_0(t)$ — вынужденные движения системы, происходящие при нулевых начальных условиях и действии на стержень внешней силы $\hat{f}(t)$. Решения (68) позволяют также выделить слагаемые, зависящие от начального смещения $\hat{u}^0$ и начальной скорости $\hat{u}^1$.

Таким образом, при $\gamma \in (0, \gamma_0)$, согласно выводам теорем 3 и 5, собственные элементы образуют почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис, причем количество комплексно сопряженных пар собственных значений конечно, т. е. при любом таком промежуточном $\gamma > 0$ существует лишь конечное число осциллирующих режимов нормальных колебаний, а все остальные режимы — апериодически затухающие.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н.Д. Копачевскому за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Adamyan V.M., Langer H., *Spectral properties of a class rational operator valued functions,* J. Operator Theory, vol. 33, 1995, 259 – 277.

[2] Adamyan V.M., Langer H., Mennicken R., Saurer J., *Spectral component of self-adjoint block operator matrices with unbounded entries,* Math. Nachr., vol. 178, 1996, 43 – 277.

[3] Adamyan V., Pivovarchik V., *On the spectra of some classes of quadratic operator pencils,* Operator Theory: Advances and Applications, vol. 106 (1998), 23 – 36.

[4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д., *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости,* Труды Санкт-Петерб. матем. об-ва, 1998, 3–33.

[5] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д., *Операторный подход к изучению гидродинамической модели Олдройта,* Математ.заметки, Июнь 1999. - Т. 65, N6, 924–928.

[6] Azizov T.Ya, Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R., *To the problem on small motions and normal oscilations of a viscous fluid in a partially filled container,* Math. Nachr., 2002 (to appear).

[7] Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A.A., *The essential spectrum of some matrix operators,* Math. Nachr. - 1994 - v.167. - 5 - 20.

[8] Азизов Т.Я., *Спектральная теория и теория расширений операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* Докт.дисс. физ.-мат.наук, Киев, Ин-т мамематики АН УССР, 1988.

[9] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С., *Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой,* М., Наука, 1986, 352 с.

[10] Баркарь С.М., Пивоварчик В.Н., *О малых поперечных колебаниях вязкоупругого стержня с жестко закрепленными концами,* Математические исследования, Кишинев, 1992, 3-14.

[11] Бирман М.Ш., Соломяк М.З., *Количественный анализ в теоремах Соболева и приложения к спектральной теории. // Материалы X матем.школы.* - Киев: Изд-во ин-та матем. АН УССР, 1974. - с. 5 – 189.

[12] Бирман М.Ш., Соломяк М.З., *Асимптотика спектра дифференциальных уравнений. // Итоги науки и техники. Матем.анализ.* – - М.: ВИНИТИ, 1977. - Т.14. – с.5-52.

[13] Griniv R.O., Shkalikov A.A., *On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping (in Russian),* Matematicheskii zametki, vol. 56, N2 (1994), 114 - 131.

[14] Konstantinov A.Yu., *Spectral theory of some matrix differential operators of mixed order.* – Universitat Bielefeld: 1997. - 11 p. (Preprint 97 - 060).

[15] Kopachevsky N.D., Mennicken R., Pashkova Yu.S., Tretter Chr., *Complete second order linear differential operator equations in Hilbert space and applications in hydrodynamics,* Trans. Of the AMS, (to appear).

[16] Kopachevsky N.D., Krein S.G., *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol.1: Self-adjoint problems for an ideal fluid,* Borkhauser Verlag: Basel, Boston, Berlin. - Operator Theory: Advanches and Applications, v. 128, 2001, 384 p.

[17] Kopachevsky N.D., Krein S.G., *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol.2: Not self-adjoint problems for a viscous fluid,* Borkhauser Verlag: Basel, Boston, Berlin. - Operator Theory: Advanches and Applications, 2003, (to appear).

[18] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике,* М., "Наука", 1989, 416 с.

[19] Костюченко А.Г., Саргсян И.С., *Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* - М.: Наука, 1979. - 400 с.

[20] Костюченко А.Г., Шкаликов А.А., *К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов,* Вестник МГУ, сер.матем., механ. - 1983, – N6. - 40 – 51.

[21] Крейн С.Г., *О колебаниях вязкой жидкости в сосуде,* Докл. АН СССР. - 1964. - Т.159, N2. - 262 – 265.

[22] Крейн С.Г., Лаптев Г.И., *К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде,* Функциональн. анализ и его приложения. - 1968. - Т.2, N1. - 40 – 50.

[23] Langer H., Moller M., *The essential spectrum of a non-elliptic boundary value problem,* Math. Nachr. - 1996. - v.178. - 233 - 248.

[24] Lankaster P., Shkalikov A., *Damped Vibrations of Beams and Related Spectral Problems,* Canadian Applied Mathematics Quarterly, vol.2, N1 (1994), 45-90.

[25] Маркус А.С., *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* – Кишинев: Штиинца. - 1986. - 260 с.

[26] Маркус А.С., Мацаев В.И., *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* – Труды ММО. - 1982. - Т.45. - 133 – 181.

[27] Маркус А.С., Мацаев В.И., *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша.* – Матем.сборник. – 1984. - Т.123, вып. 3. - 391 – 406.

[28] Mennicken R., Shkalikov A.A., *Spectral decomposition of symmetric operator matrices,* Math. Nachr. – 1996. - V.179. - 59 – 273.

[29] Pivovarchik V.N., *Problem Connected with Oscillations of Elastic Beams with Internal and Viscous Damping,* Moscow University Bulletin, vol. 42, 1987, 68-71.

[30] Pivovarchik V.N., *A lower bound of the instability index in the vibration problem for an elastic fluid-conveying pipe,* Russian Journ. Of Mathematical Physics. – 1994, vol. 2. – 267 – 272.

[31] Shkalikov A.A., *On esential spectrum of matrix operator,* Matem. Zametki. – 1995, 945 – 949.

[32] Яковлев А.В., *Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце,* Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, (в печати).

E-mail: `a-v-yakovlev@yandex.ru`

ON DIRECT AND INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR GENERALIZED JACOBI MATRICES

M. S. Derevyagin, V. A. Derkach
Donetsk National University
Donetsk, Ukraine

A new class of generalized Jacobi matrices is introduced. Every generalized Nevanlinna function $m(z)$, which is a solution of an indefinite moment problem is proven to be the m-function of a unique generalized Jacobi matrix. The method we use is based on the step-by-step Schur process of solving the indefinite moment problem.

Keywords: Jacobi matrix, m-function, generalized Nevanlinna function, inverse spectral problem, Schur algorithm

1. Introduction

A real tridiagonal matrix $H = (h_{ij})_{i,j=0}^N$ ($h_{ij} = 0$ if $|i-j| > 1$) is said to be a Jacobi matrix if $h_{i,i+1} = h_{i+1,i} > 0$. It is well known (see [1, 3]) that the spectra of matrices H and $H_{[1,N]} = (h_{ij})_{i,j=1}^N$ interlace. Conversely, given two sets $\{\lambda_j\}_{j=0}^N$, $\{\nu_j\}_{j=1}^N$ of real numbers, such that

$$\lambda_0 < \nu_1 < \lambda_1 < \cdots < \nu_N < \lambda_N$$

there is a unique Jacobi matrix H such that $\sigma(H) = \{\lambda_j\}_{j=0}^N$ and $\sigma(H_{[1,N]}) = \{\nu_j\}_{j=1}^N$. The standard way to solve this inverse problem is to reduce it to some moment problem, use the Gramm-Shmidt orthogonalization procedure in the space of polynomials, and then the needed Jacobi matrix is recovered as a matrix representation for the multiplication operator (see [1]). The other approach is based on the Schur step-by-step process of solving the moment problem associated with the Jacobi matrix (see [10], [8]).

The first method was applied in [11] to a class of generalized Jacobi matrices associated with indefinite moment problems. Since the orthogonalization procedure in an indefinite inner product space leads to the so-called almost orthogonal polynomials [11] which are not uniquely defined one cannot expect the uniqueness result for the corresponding generalized Jacobi matrix. In the present paper we give another definition of generalized Jacobi matrix (by reducing the number of free parameters) and apply the Schur step-by-step process to the corresponding indefinite moment problem in order to solve the inverse problem for generalized Jacobi matrix. This approach leads to more exact results, in particular, the generalized Jacobi matrices is recovered uniquely by the spectral data of its m-function. We essentially use the results of the paper [4], where the Schur step-by-step algorithm of solving indefinite moment problem was elaborated. These results are closely related to the Schur algoritm for generalized Schur functions investigated recently in [2].

2. Generalized Jacobi matrix and its m-function

Let $p(\lambda) = p_n\lambda^n + \cdots + p_1\lambda + p_0$, $p_n = 1$ be a monic scalar polynomial of degree n. Let us associate to the polynomial p its symmetrizator E_p and the companion matrix C_p, given by

$$E_p = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ \vdots & \iddots & \\ p_n & & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad C_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & & \mathbf{0} & -p_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Definition 1. (cf. [11]) Let p_j be real monic polynomials of degree n_j

$$p_j(\lambda) = \lambda^{n_j} + p^{(j)}_{n_j-1}\lambda^{n_j-1} \cdots + p^{(j)}_1\lambda + p^{(j)}_0,$$

and let $\varepsilon_j = \pm 1$ $(j = 0, \dots, N)$. The tridiagonal block matrix

$$H = \begin{pmatrix} A_0 & \widetilde{B}_0 & & \mathbf{0} \\ B_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \widetilde{B}_{N-1} \\ \mathbf{0} & & B_{N-1} & A_N \end{pmatrix} \tag{2}$$

where $A_j = C_{p_j}$ and $n_{j+1} \times n_j$ matrices B_j and $n_j \times n_{j+1}$ matrices $\widetilde{B}_j$ are given by

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & b_j \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{B}_j = \varepsilon_j\varepsilon_{j+1}\begin{pmatrix} 0 & \dots & b_j \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ (b_j > 0,\ j = 0, \dots, N-1). \tag{3}$$

will be called a generalized Jacobi matrix (GJM) associated with the polynomials $\{\varepsilon_j p_j\}_{j=0}^N$.

Let $n + 1 = \sum_{j=0}^N n_j$. Define a $(n + 1) \times (n + 1)$ matrix G by the equality

$$G = \mathrm{diag}(G_0, \dots, G_N),\ G_j = \varepsilon_j E^{-1}_{p_j}\ (j = 0, \dots N) \tag{4}$$

and let $\ell_2^{(n+1)}(G)$ be the space of $n + 1$ vectors with the inner product

$$\langle x, y\rangle = (Gx, y) \quad (x, y \in \ell_2^{(n+1)}). \tag{5}$$

Let us set a standard basis in $\ell_2^{(n+1)}(G)$ by the equalities

$$e_{j,k} = \{\delta_{l,\sum_{i=0}^{j-1} n_i+k}\}_{l=0}^n \quad (j = 0, \dots, N; k = 0, \dots, n_j - 1), e := e_{0,0}.$$

Proposition 1. The GJM H defines a cyclic symmetric operator in $\ell_2^{(n+1)}(G)$.

In the space $\mathbb{C}[n]$ of polynomials of formal degree n there is a basis of polynomials of the first kind $\{P_{j,k}(\lambda)\}_{k=0,\dots,n_j-1}^{j=0,\dots,N}$ such that the multiplication operator in this basis is given by the matrix H. Straightforward calculations show that $P_{j,0}$ turn out to be solutions of the following equations, where $b_{-1} = 0$, $b_N = 1$:

$$\varepsilon_j\varepsilon_{j-1}b_{j-1}P_{j-1,0}(\lambda) - p_j(\lambda)P_{j,0}(\lambda) + b_jP_{j+1,0} = 0 \quad (j = 0, \dots, N). \tag{6}$$

Denote by $H_{[j,m]}$ the shortened GJM corresponding to the basis vectors $\{e_{i,k}\}_{k=0,\dots,n_i-1}^{i=j,\dots,m}$ $(0 \le j \le m \le N)$. The following connection between the polynomials of the first kind and the shortened Jacobi matrices in the classical case can be found in [3].

Proposition 2. Polynomials $P_{j,0}$ can be found by the formulas

$$P_{j+1,0}(\lambda) = (b_0 \dots b_j)^{-1} \det(\lambda - H_{[0,j]}) \quad (j = 0, \dots, N; k = 0, \dots, n_j - 1) \tag{7}$$

$$P_{j,k}(\lambda) = \lambda^k P_{j,0}(\lambda) \quad (j = 0, \dots, N; k = 0, \dots, n_j - 1). \tag{8}$$

Definition 2. The function $m(\lambda) = \langle (H - \lambda)^{-1}e, e\rangle$ $(e := e_{0,0})$ will be called the m-function of the GJM H.

Remind ([11]) that the generalized Nevanlinna class $\mathbf{N}_\kappa$ $(\kappa \in \mathbb{Z}_+)$ consists of functions $\varphi(z)(= \overline{\varphi(\bar{z})})$ meromorphic on $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, such that for every choice of z_i in the domain of holomorphy $\rho(\varphi)$ of the function $\varphi(z)$ the matrix $\left(\frac{\varphi(z_i)-\overline{\varphi(z_j)}}{z_i-\overline{z_j}}\right)_{i,j=1}^n$ has at least κ (and for some choice of z_i exactly κ) negative eigenvalues.

Proposition 3. The m-function of the GJM H belongs to the class $\mathbf{N}_\kappa$, where $\kappa = \mathrm{ind}_-(G)$, and it can be found by the formula
$$m(\lambda) = -\varepsilon_0 \frac{\det(\lambda - H_{[1,N]})}{\det(\lambda - H)}. \tag{9}$$

Define the function $m(\lambda, j)$ by the equality
$$m(\lambda, j) = \left\langle (H_{[j,N]} - \lambda)^{-1} e_{j,0}, e_{j,0} \right\rangle \;\; (j = 0, \dots, N). \tag{10}$$
Clearly, $m(\lambda, 0) = m(\lambda)$, $m(\lambda, N) = -\dfrac{\varepsilon_N}{p_N(\lambda)}$. In view of Proposition 3 the function $m(\lambda, j)$ belongs to the class N_{κ_j}, where $\kappa_j = \sum\limits_{i=j}^{N} \mathrm{ind}_-(G_i)$ and is given by
$$m(\lambda, j) = -\varepsilon_j \frac{\det(\lambda - H_{[j+1,N]})}{\det(\lambda - H_{[j,N]})} \quad (j = 0, \dots, N-1). \tag{11}$$

Proposition 4. The functions $m(\lambda, j)$ and $m(\lambda, j+1)$ are connected by the following Ricatti equation (see [8] for the case $\kappa = 0$).
$$m(\lambda, j) = -\varepsilon_j \frac{1}{p_j(\lambda) + \varepsilon_j {b_j}^2 m(\lambda, j+1)} \; (j = 0, \dots, N-1). \tag{12}$$

3. m-function and indefinite moment problem

Define in the linear space $\mathcal{H} = \mathbb{C}_n[\lambda]$ an indefinite inner product
$$\langle P_{j,k}, P_{j',k'} \rangle_{\mathcal{H}} = (G e_{j,k}, e_{j',k'}) \quad (j, j' = 0, \dots, N; k = 0, \dots, n_j - 1; k' = 0, \dots, n_{j'} - 1). \tag{13}$$

Proposition 5. The m-function of the GJM H has the following asymptotics
$$m(\lambda) \sim -\frac{s_0}{\lambda} - \frac{s_1}{\lambda^2} - \dots - \frac{s_{2n}}{\lambda^{2n+1}} \quad (\lambda = iy, y \to +\infty), \tag{14}$$
where $s_{i+j} = \langle \lambda^i, \lambda^j \rangle$, the Hankel matrix $S_n = (s_{i+j})_{i,j=0}^n$ is nondegenerate and $(\kappa :=) \, \mathrm{ind}_-(S_n) = \mathrm{ind}_-(G)$.

It follows from Proposition 5 that $m(\lambda)$ is a solution of the following indefinite moment problem (see [5], [6], [11])

Problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$. *Given are a nonnegative integer κ and a sequence $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{2n}$ of real numbers, such that the matrix $S_n = (s_{i+j})_{i,j=0}^n$ is nondegenerate. Find a function $\varphi \in \mathbf{N}_\kappa$, such that*
$$\varphi(\lambda) = -\frac{s_0}{\lambda} - \frac{s_1}{\lambda^2} - \dots - \frac{s_{2n}}{\lambda^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right) \quad (\lambda = iy, y \to +\infty). \tag{15}$$

As is known (see [5], [6]), the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$ is solvable, if
$$\mathrm{ind}_-(S_n) \le \kappa. \tag{16}$$
Let n_0 be the least natural such that $\det S_{n_0-1} \ne 0$ and let $\kappa_0 = \mathrm{ind}_-(S_{n_0-1})$, $\mathbf{s}^{(0)} = \{s_j\}_{j=0}^{2n_0-2}$. The problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}^{(0)}, n_0 - 1, \kappa)$ is elementary in a sense that it defines the first step in the solution of the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$. The step-by-step algorithm for the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$ was elaborated in [4]. Let us set
$$P_{n_0}(\lambda) = \frac{1}{\det S_{n_0-1}} \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_{n_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n_0-1} & \dots & s_{2n_0-1} \\ 1 & \dots & \lambda^{n_0} \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_0 = \mathrm{sign}\, s_{n_0-1}. \tag{17}$$

Theorem 1 ([4]). *Assume that $n_0 - 1 < n$. Every solution φ of the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$ admits the representation*

$$\varphi(\lambda) = -\frac{s_{n_0-1}}{P_{n_0}(\lambda) + \varepsilon_0 \varphi_1(\lambda)}, \tag{18}$$

where $\varphi_1 \in N_{\kappa-\kappa_0}$. Moreover, φ is a solution of the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$, if and only if φ_1 is a solution of the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}^{(1)}, n - n_0, \kappa - \kappa_0)$, where the Hankel matrix $S^{(1)} = (s^{(1)}_{i+j})^{n-n_0}_{i,j=0}$ is given by the equality

$$S^{(1)}_{n-n_0} = |s_{n_0-1}|(T_{n_0} S_n^{-1} T_{n_0}^{\top})^{-1}, \tag{19}$$

and T_{n_0} is $(n - n_0 + 1) \times (n + 1)$ matrix

$$T_{n_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{n_0-1} & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & s_{n_0-1} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Let now $m(\lambda)$ be the m-function of a GJM H of the order $n+1$. Then $m(\lambda)$ is a solution of the indefinite moment problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, n, \kappa)$, where $s = \{s_i\}_{i=0}^{2n}$ and κ are defined in Proposition 5. Moreover, it turns out that the polynomial P_{n_0} coincides with the polynomial p_0 in the Ricatti equation (12). This observation complements the statement of Proposition 4.

Proposition 6. The m-function $m(\lambda)$ and the function $m(\lambda, 1)$ are connected by the equality

$$m(\lambda) = -\varepsilon_0 \frac{1}{p_0(\lambda) + \varepsilon_0 b_0^2 m(\lambda, 1)}. \tag{21}$$

Moreover, $m(\lambda, 1)$ is a solution of the induced moment problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}^{(1)}, n - n_0, \kappa - \kappa_0)$, where the sequence $\mathbf{s}^{(1)} = \{s_i^{(1)}\}_{i=0}^{2(n-n_0)}$ is defined by (19).

4. Inverse problems for generalized Jacobi matrices

When applying Proposition 6 to a rational function $\varphi = \frac{p}{q}$ ($\deg p < \deg q$) one obtains a decomposition of φ into a continuous fraction

$$\varphi(\lambda) = -\frac{\varepsilon_0}{p_0(\lambda)-} \quad \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 b_0^2}{p_1(\lambda)-} \quad \dots \quad -\frac{\varepsilon_{N-1}\varepsilon_N b_{N-1}^2}{p_N(\lambda)}. \tag{22}$$

Then the GJM H is recovered by p_j, ε_j and b_j via (2) and (3).

Theorem 2. *Let φ be a proper rational real function of the class $\mathbf{N}_\kappa$. Then there is a unique finite GJM H such that the corresponding m-function $m(\lambda)$ is proportional to $\varphi(\lambda)$.*

Corollary 1. *Let $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ and $\{\nu_i\}_{i=n_0}^n$ be two disjoint sets in $\mathbb{C}$ and let each be symmetric with respect to $\mathbb{R}$, $\varepsilon_0 = \pm 1$, $C(\lambda) = \prod_{i=n_0}^{n} (\lambda - \nu_i)$, $D(\lambda) = \prod_{i=0}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ and let $-\varepsilon_0 C(\lambda)/D(\lambda) \in \mathbf{N}_\kappa$. Then there is a unique finite generalized Jacobi matrix H such that $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ are eigenvalues of the matrix H and $\{\nu_i\}_{i=n_0}^n$ are eigenvalues of the matrix $H_{[1,N]}$.*

Let now H be an infinite GJM, and assume that there is an N_0 such that $H_{[N_0+1,\infty]}$ is an infinite Jacobi matrix in the classical sence. Let $\mathcal{H}(\mathbf{s})$ be a completion of the space of polynomials $\mathbb{C}[\lambda]$ with respect to the inner product $\langle \lambda^i, \lambda^j \rangle = s_{i+j}$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$), where s_i are given by $s_i = \langle H^i e, e \rangle$. Then the operator H can be considered as a matrix representation of the multiplication operator Λ in the basis $P_{j,k}$ in $\mathcal{H}$ ($j = 0, 1, \dots;\ k = 0, \dots, n_j - 1$). Associated with the sequence $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^\infty$ is the following indefinite moment problem

Problem $\mathbf{M}(\mathbf{s}, \kappa)$. *Given are a nonnegative integer κ and a sequence $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{2n}$ of real numbers, such that the matrix $S_n = (s_{i+j})_{i,j=0}^n$ is nondegenerate for all n large enough. Find a function $\varphi \in \mathbf{N}_\kappa$, which has the asymptotic expansion (15) for all $n \in \mathbb{N}$.*

As was shown in [11] the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s},\kappa)$ is solvable if and only if the Hankel matrices S_n have κ negative eigenvalues for all n large enough. The problem $\mathbf{M}(\mathbf{s},\kappa)$ is called *determinate* if it has a unique solution $\varphi \in \mathbf{N}_\kappa$. A necessary and sufficient condition for the problem $\mathbf{M}(\mathbf{s},\kappa)$ to be determinate is the self-adjointness of the operator Λ in $\mathcal{H}$ or, equivalently, the self-adjointness of the operator H in $\ell_2^\infty(G)$. Let us say that the infinite generalized Jacobi matrix H has *type* D if the corresponding operator H is self-adjoint in $\ell_2^\infty(G)$. In this case the operator H is cyclic and e is a generating vector for H. One can define the m-function of a GJM H of type D as in Definition 2.

Proposition 7. Let H be an infinite generalized Jacobi matrix H of type D. Then the m-function of H is a solution of a determinate indefinite moment problem $\mathbf{M}(\mathbf{s},\kappa)$, where s_j are given by $s_j = \langle H^j e, e\rangle$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ and $\kappa = \mathrm{ind}_- G$.

The properties of $m(\cdot)$ in Proposition 7 completely characterize the GJM H.

Theorem 3. *Let $m(\lambda)$ be an $\mathbf{N}_\kappa$-function such that m is a solution of a determinate indefinite moment problem $\mathbf{M}(\mathbf{s},\kappa)$, where $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ and $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty$ is a sequence of real numbers. Then there is a unique GJM H of type D with the m-function proportional to $m(\lambda)$.*

As a corollary one obtains the following analog of the Stone theorem [1].

Corollary 2. *Every cyclic self-adjoint operator in a Pontryagin space is unitary equivalent to a unique GJM of type D.*

The following corollary extends the result of [7] to the case of GJM.

Corollary 3. *Let $\{\nu_i\}_{i=n_0}^\infty$ and $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$ $(\lambda_j \neq \nu_i)$ be zeros of two entire functions of minimal exponential type $C(\lambda)$ and $D(\lambda)$, and let $m(\lambda) = -kC(\lambda)/D(\lambda) \in \mathbf{N}_\kappa$ be a solution of a determinate moment problem $\mathbf{M}(\mathbf{s},\kappa)$ for some $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ and $k \in \mathbb{C}$. Then there is a unique GJM H of type D with the discrete spectrum $\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ and such that $\sigma(H_{[1,\infty]}) = \{\nu_i\}_{i=n_0}^\infty$.*

The statement is immediate from Theorem 3 and the fact that an entire function of minimal exponential type is characterized by its zeros up to a multiplicative constant.

References

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem*, GIFML, Moskow, 1961.

[2] D. Alpay, T. Ya. Azizov, A. Dijksma, and H. Langer, *The Schur algorithm for generalized Schur functions*, to appear in Operator Theory: Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel.

[3] Ju. M. Berezanskii, *Expansions in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators*, Transl. Math. Monographs 17, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.,(1968).

[4] M. S. Derevyagin, *On the Schur algorithm for indefinite moment problem*, Spectral and evolutionary problems, Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Math. School–Symposium, Simferopol. V.11 (2001) P.106-109.

[5] V. Derkach, *On generalized resolvents of Hermitian relations in Krein spaces*, J. Math. Sci. Vol.97 (1999) no.5, 4420-4460.

[6] H. Dym, *On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy*, Int. Equation and Operator Theory, Vol.12 (1989).

[7] L. Fu, H. Hochstadt, *Inverse theorems for Jacobi matrices*, Journal of Math. Anal. and Appl., Vol.47 (1974), 162–168.

[8] F. Gesztesy, B. Simon, *m-functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices*, Journal d'Analyse Math., Vol. 73 (1997), 267-297.

[9] I. Gohberg, P. Lankaster, L. Rodman, *Matrix polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[10] H. Hochstadt, *On the construction of a Jacobi matrix from spectral data*, Linear Algebra and Appl., Vol.8 (1974), 435–446.

[11] M. G. Kreĭn, H. Langer, *On some extension problem which are closely connected with the theory of hermitian operators in a space Π_κ III. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems, Part I*, Beiträge zur Anal. 14 (1979), 25-40.

ON THE REFLEXIVITY OF THE OPERATOR $J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha$

Domanov I. Yu, Surovtseva V. V.
Donetsk National University
Donetsk, Ukraine

Keywords: Reflexive operator, reflexive algebra, invariant subspace.

Introduction. Let X_1, X_2 are Banach spaces. We denote by $[X_1, X_2]$ the space of bounded linear operators from X_1 to X_2, $[X] := [X, X]$. $AlgT$ denotes the weakly closed subalgebra of $[X]$ generated by T and the identity $\mathbb{I}$. $LatT$ denotes the lattice of subspaces of X invariant under T and $AlgLatT$ denotes the algebra of operators in $[X]$ leaving each subspace in $LatT$ invariant.

P.R. Halmos has called a subalgebra $\mathfrak{A}$ of $[X]$ reflexive if the only operators that leave invariant all the closed invariant subspaces of $\mathfrak{A}$ are the members of $\mathfrak{A}$ itself. Reflexive algebras contain the identity operator $\mathbb{I}$ and are closed in the weak operator topology; on the other hand, it follows from the double commutant theorem that any von Neuman algebra (i.e. weakly closed self-adjoint operator algebra containing $\mathbb{I}$) is reflexive. The question of reflexivity of an operator is the question of reflexivity of the weakly closed algebra generated by it. The reflexivity property of an operator has an approximation character: an operator A is reflexive if every operator whose A-invariant subspaces are all invariant can be approximated by polinomials in A in the weak operator topology, i.e. if $AlgLatA = AlgA$. The first results about reflexive operators are contained in D. Sarason's paper [8], were the reflexivity of normal operators and analytic Teoplitz operators is proved. J. A. Deddens [2] has proved that any isometric operator is reflexive. J.A. Deddens and P.A. Fillmore [3] have found a criterion of reflexivity for operators acting on finite - dimensional spaces (see also [4]). For $T \in [X]$ we write $T^{(k)}$ for the direct sum of k-copies of T. The operator T is called k-reflexive if $T^{(k)}$ is reflexive. k-reflexivity of the finite dimensional algebras were investigated by E.Azoff [1]. A reflexivity criterion for contractions with a scalar inner characteristic function has been established by V.V. Kapustin in [6]. He has proved also that a C_0-operator with a Jordan model $M_{\Theta_1} \oplus M_{\Theta_2} \oplus \dots$ is reflexive if and only if M_Θ is reflexive, where $\Theta = \Theta_1/\Theta_2$. In particular, each C_0-contraction is 2-reflexive.

The following fact is implicitly contained in [8] (see also [7] for the explicit statement): if $LatT^{(k)} \subseteq LatA^{(k)}$ for all $k \in \mathbb{Z}_+$, then $A \in AlgT$. The more general problem of determining all reflexive subalgebras of $[X]$ has so far defied solution.

Notations. $\mathbb{Z}_+ := \{n : \ n \in \mathbb{Z}, \ n \geqslant 0\}$; $\mathbb{I}_k$— denotes the identity in $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{O}_k := 0 \cdot \mathbb{I}_k$; span$E$ is the closed linear span of the set $E \subseteq X$; supp f is a support of a function $f(x)$; $r * f$ stands for the convolution of functions $r, \ f \in L_1[0,1] \ : \ (r * f)(x) := \int_0^x r(x-t) f(t) dt$; 1_k denotes function $\mathbb{1}$ in the space $W_p^k[0,1]$.

As usual $W_p^k[0,1]$ stands for the Sobolev space : $f \in W_p^k[0,1]$ if f has $k-1$ absolutely continuous derivatives and $f^{(k)} \in L_p[0,1]$. It is a Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_{W_p^k[0,1]} = \left[\sum_{i=0}^{k-1} |f^{(i)}(0)|^p + \int_0^1 |f^{(k)}(t)|^p \, dt \right]^{1/p}.$$

$W_{p,0}^k[0,1] = \{f \in W_p^k[0,1] \ : \ f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$. We put also $W_p^0[0,1] = W_{p,0}^0[0,1] := L_p[0,1]$ and $E_l^k := \{f \in W_p^k[0,1] \ : f(0) = \ldots = f^{(k-l-1)}(0) = 0\}$ for $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ and $E_k^k := W_p^k[0,1]$.

Let J_k^α and $J_{k,l}^\alpha$ denotes the complex powers of the integration operator $(Jf)(x) = \int\limits_0^x f(t) dt$ defined on Sobolev spaces $W_p^k[0,1]$ and E_l^k correspondingly. In what follows we assume that either $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ or $Re\alpha > 0$. Under this assumption the operator J_k^α is well defined on $W_p^k := W_p^k[0,1]$.

The spectral properties of the operator J_k^α. have been investigated in [5]. In particular, descriptions of the lattices $LatJ_k^\alpha$ and $HyplatJ_k^\alpha$ and the set $CycJ_k^\alpha$, as well as the algebras $\{J_k^\alpha\}'$, $\{J_k^\alpha\}''$ and $AlgJ_k^\alpha$ have been obtained in [5].

In the paper under consideration, we prove the reflexivity of the operator $J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha$ and present the description of $Alg(J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha)$.

1.Algebra of the operator $J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha$.

To obtain a description of $Alg(J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha)$ we need a description of $AlgJ_k^\alpha$ from [5].

Proposition 1. ([5]) The following are true :

1) If either $\alpha = 1$ or $k = 1$, then $AlgJ_k^\alpha = \{J_k^\alpha\}''$ (in particular, $AlgJ_k = \{J_k\}''$);

2) If $1 < \alpha \leqslant k-1$, then $AlgJ_k^\alpha = \{T = cI + R \ : \ c \in \mathbb{C},\ R \in Alg_0 J_k^\alpha\}$, where

$$Alg_0 J_k^\alpha = \{R \ : \ Rf = r * f,\ r \in W_p^{k-1}[0,1],\ r^{(j)}(0) = 0 \ for \ j \neq i\alpha - 1,\ i \leqslant [\tfrac{k-1}{\alpha}]\};$$

3) If $k \geqslant 2$ and $Re\alpha \geqslant k - \frac{1}{p}$, then
$AlgJ_k^\alpha = \{T = cI + R \ : \ c \in \mathbb{C},\ Rf = r * f,\ r \in W_{p,0}^{k-1}[0,1]\}$.

Theorem 1. *$Alg(J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha) = \{T \oplus T : T = cI + R, c \in \mathbb{C}, Rf = r * f\}$, where $r \in W_p^{k+s-1}[0,1]$, $r^{(i)}(0) = 0$, for $i \neq j\alpha - 1$, $j \leqslant [\frac{k+s-1}{\alpha}]$.*

Доказательство. Let $T_1 \oplus T_2 \in Alg(J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha)$. Then $T_1 \in AlgJ_k^\alpha$, $T_2 \in AlgJ_{k+s}^\alpha$. Hence by Proposition 1

$$(T_1 f)(x) = c\mathbb{I} + r_1 * f, \qquad r_1 \in W_p^{k-1}[0,1],$$

$$(T_2 f)(x) = c\mathbb{I} + r_2 * f, \quad r_2 \in W_p^{k+s-1}[0,1], \quad r_2^{(i)}(0) = 0, \text{ for } i \neq j\alpha - 1, \quad j \leqslant [\frac{k+s-1}{\alpha}].$$

Let

$$E = \{\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} : f \in W_p^{k+s}[0,1]\}. \tag{1}$$

Then $E \in Lat(J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha) \subset Lat(T_1 \oplus T_2)$. Setting $f = 1_{k+s}$ one obtains

$$(T_1 \oplus T_2)\begin{pmatrix} 1_{k+s} \\ 1_{k+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + r_1(x) * 1_{k+s} \\ c + r_2(x) * 1_{k+s} \end{pmatrix} \in E.$$

Hence $c + r_1(x) * 1_{k+s} \equiv c + r_2(x) * 1_{k+s}$ and $r_1(x) \equiv r_2(x) \in W_p^{k+s-1}[0,1]$. $\square$

2. Reflexivity of the operator $J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha$.

Lemma 1. *Let $A_1 \in [X_1]$, $A_2 \in [X_2]$ and A_1 is isometrically equivalent to the operator A_2, i.e. $UA_1 = A_2 U$ with some isometric operator $U : X_1 \to X_2$. Let also $A = A_1 \oplus A_2$ and $B \in AlgLatA$. Then*

1) $B = B_1 \oplus B_2$, where $UB_1 = B_2 U$. 2) $B_1 \in \{A_1\}'$, $B_2 \in \{A_2\}'$.

Доказательство. 1) The splitting of B into direct sum of B_1 and B_2 is obvious. In order to prove the equality $UB_1 = B_2 U$ we consider subspace $E \subseteq X_1 \oplus X_2$ given by: $E = grU = \{\begin{pmatrix} f \\ Uf \end{pmatrix} : f \in X_1\}$. Since $E \in LatA$, $BE = \{\begin{pmatrix} B_1 f \\ B_2 U f \end{pmatrix} : f \in X_1\} \subseteq E$. The last inclusion yields $\begin{pmatrix} B_1 f \\ B_2 U f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 f \\ U B_1 f \end{pmatrix}$ for all $f \in X_1$, and hence the first assertion is proved.

2) In order to prove the second assertion we consider subspace $E' = \{\begin{pmatrix} f \\ UA_1 f \end{pmatrix} : f \in X_1\}$. Then

$$AE' = \{\begin{pmatrix} A_1 f \\ A_2 U A_1 f \end{pmatrix} : f \in X_1\} = \{\begin{pmatrix} A_1 f \\ U A_1 A_1 f \end{pmatrix} : f \in X_1\} \subseteq E',$$

$$BE' = \{\begin{pmatrix} B_1 f \\ B_2 U A_1 f \end{pmatrix} : f \in X_1\} = \{\begin{pmatrix} B_1 f \\ U B_1 A_1 f \end{pmatrix} : f \in X_1\}.$$

Since $BE' \subseteq E'$, $UB_1A_1f = UA_1B_1f$ for all $f \in X_1$ and hence $B_1 \in \{A_1\}'$.

Further : $B_2A_2 = B_2UA_1U^{-1} = UB_1A_1U^{-1} = UA_1B_1U^{-1} = UA_1U^{-1}UB_1U^{-1} = A_2B_2$. $\square$

For further considerations we recall several facts from [5].

Proposition 2. ([5]) The operator $J^\alpha_{k,l}$ defined on E^k_l is isometrically equivalent to the operator J^α_{k-l} defined on $W^{k-l}_p[0,1]$. In particular the operator $J^\alpha_{k,0}$ defined on $W^k_{p,0}[0,1]$ is isometrically equivalent to the operator J^α_0 defined on $W^0_{p,0}[0,1] := L_p[0,1]$.

Доказательство. It is clear that the operator $U_l = \frac{d^l}{dx^l} : E^k_l \to W^{k-l}_p[0,1]$, isometrically maps E^k_l on $W^{k-l}_p[0,1]$. Moreover,

$$U_l^{-1} = U_l^* = J^l \ : \ W^{k-l}_p[0,1] \to E^k_l.$$

The assertion follows now from the identity $J^\alpha_{k,l} = U_l^{-1} J^\alpha_{k-l} U_l$. $\square$

Proposition 3. ([5]) Let either $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ or $Re\alpha > k - \frac{1}{p}$ and J^α_k be the operator J^α defined on $W^k_p[0,1]$. Then $R \in \{J^\alpha_k\}'$ if and only if

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x r(x-t)f(t)dt, \quad r \in W^k_p[0,1].$$

In particular, $\{J^\alpha_k\}'$ is commutative algebra and does not depend on α.

Corollary 1. *Let $R \in \{J^\alpha_k\}'$. Then $R \in AlgLatJ^\alpha_k$ if and only if $R \in AlgJ^\alpha_k$.*

Доказательство. Let $R \in AlgLatJ^\alpha_k$ and $m = k - 1 - \alpha[(k-1)/\alpha]$. In order to prove the inclusion $R \in AlgJ^\alpha_k$ one consider subspace

$$E_m = \{f : f \in W^k_p[0,1],\ f^{(m)}(0) = f^{(m+\alpha)}(0) = \cdots == f^{(k-1-\alpha)}(0) = f^{(k-1)}(0) = 0\} \in LatJ^\alpha_k.$$

Then

$$(Rf)^{(k-1)}(0) = r(0)f^{(k-1)}(0) + r'(0)f^{(k-2)}(0) + \cdots + r^{(k-1)}(0)f(0) = 0.$$

Setting $f(x) = x^l$, $l \in \{0, 1, \dots, k-1\} \setminus \{m, m+\alpha, \dots, k-1\}$ one obtaines that $r^{(k-1-l)}(0) = 0$ which was has to be proved. $\square$

Theorem 2. *The operator $J^\alpha_k \oplus J^\alpha_{k+s}$ is reflexive for each $s \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. To prove the inclusion $AlgLat(J^\alpha_k \oplus J^\alpha_{k+s}) \subseteq Alg(J^\alpha_k \oplus J^\alpha_{k+s})$ we consider the block matrix representations of the operators $J^\alpha_k \oplus J^\alpha_{k+s}$ and $T \in AlgLat(J^\alpha_k \oplus J^\alpha_{k+s})$:

$$J^\alpha_k \oplus J^\alpha_{k+s} = \begin{pmatrix} J^\alpha_k & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J^\alpha_{k,k+s} & * \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & * \end{pmatrix}, \qquad T = A_k \oplus A_{k+s} = \begin{pmatrix} A_k & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_{k,k+s} & * \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & * \end{pmatrix}$$

with respect to the direct sum decomposition :

$$W^k_p[0,1] \oplus W^{k+s}_p[0,1] = W^k_p[0,1] \oplus E^{k+s}_k \dotplus span\{1, x, \dots x^{s-1}\} := W^k_p[0,1] \oplus E^{k+s}_k \dotplus X_s.$$

So

$$A_k \in [W^k_p[0,1]], \quad A_{k+s} \in [W^{k+s}_p[0,1]], \quad A_{k,k+s} \in [E^{k+s}_k], \quad C \in [X_s], \quad B \in [X_s, E^{k+s}_k].$$

By Proposition 2 A_k is isometrically equivalent to the operator $A_{k,k+s} : A_{k,k+s} = U_s^{-1} A_k U_s$, where $U_s = \frac{d^s}{dx^s}$ and hence by Lemma 1 : $A_k \in \{J^\alpha_k\}'$. In view of this Proposition 3 implies

$$(A_k f)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x r(x-t)f(t)dt, \quad r,\ f \in W^k_p[0,1].$$

Further we consider subspace $E \in Lat(J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha)$ of the form (1). Then

$$T\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k f \\ A_{k+s} f \end{pmatrix} \in E, \quad f \in W_p^{k+s}[0,1].$$

Hence

$$A_{k+s}f = A_k f = \frac{d}{dx}\int_0^x r(x-t)f(t)dt \in W_p^{k+s}[0,1], \qquad f \in W_p^{k+s}[0,1].$$

It follows that $r(x) = A_k \mathbb{1} \in W_p^{k+s}[0,1]$. Thus, by Theorem 1 : $T \in Alg(J_k \oplus J_{k+s})$. One completes the proof by applying Corollary 1. □

Corollary 2. *Operator J_k^α is 2-reflexive.*

The authors express their deep appreciation to M.M. Malamud for the target setting and useful remarks.

References

[1] E.A.Azoff. *k-reflexivity in finite dimensional spaces.* Duke Math. J.-1973.-v.40.-P.821-830.

[2] J.A.Deddens. *Every isometry is reflexive.* Proc.Amer.Math.Soc.-1971.-v.28.-P.509-512.

[3] J.A.Deddens, P.A.Fillmore. *Reflexive linear transformations.* Linear Algebra and Appl .-1975. v.10.-P.89-93.

[4] I.Yu.Domanov, A.V.Kononovich *A description of the reflexive finite-dimensional operators.* Spectral and evolutionary problems v.11, Proc. of the eleventh Crimean Autumn Math. School-Symposium.-Simferopol.-2001.-P.32-33.

[5] I.Yu.Domanov, M.M.Malamud. *Invariant and hyperinvariant subspaces of an operator J^α and related operator algebras in sobolev spaces.* Linear Algebra and Appl. -2002.-v.348/1-3.-P.209-230.

[6] V.V.Kapustin. *Reflexivity of operators : general methods and a criterion for almost isometric contractions.* St.Petersburg Math. J.-1993.-v.4.-N2.

[7] M.M. Malamud *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators.* Operator Theory : Advan. and App., Integral and Differential Operators.-1998.- v.102.- P.143-167.

[8] D.Sarason. *Invariant subspaces and unstarted operator algebras.* Pasific J.Math.-1966.-v.17.-P.511-517.

INVARIANT AND HYPERINVARIANT SUBSPACES OF THE OPERATOR J^α IN THE SOBOLEV SPACES

G. S. Romashchenko
Donetsk National University
Donetsk, Ukraine

1. Introduction

It is well known ([3], [5], [9]) that the Volterra integration operator defined on $L_p[0,1]$ by $J\colon f \to \int_0^x f(t)\,dt$ is unicellular for $p \in [1,\infty)$ and its lattice of invariant subspaces is anti-isomorphic to the segment $[0,1]$.

The same is also true for the complex powers of the integration operator J:

$$J^\alpha\colon f \to \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{1}$$

More precisely, the lattice of invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J^α are of the form:

$$\operatorname{Lat} J^\alpha = \operatorname{Hyplat} J^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]} L_p[0,1]\colon 0 \le a \le 1\}. \tag{2}$$

E. Tsekanovskii [12] has obtained a description of the lattice $\operatorname{Lat} J_k$ of invariant subspaces of the integration operator J_k defined on the Sobolev space $W_2^k[0,1]$.

I. Domanov and M. Malamud [4] have described the lattices $\operatorname{Lat} J_k^\alpha$ and $\operatorname{Hyplat} J_k^\alpha$ of invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J_k^α defined on $W_p^k[0,1]$ and investigated the operator algebras $\operatorname{Alg} J_k^\alpha$, commutant $\{J_k^\alpha\}'$, and double commutant $\{J_k^\alpha\}''$.

In particular, it is shown in [4] that the operator J^α is unicellular on $W_p^k[0,1]$ (with $k \ge 2$) if and only if $\alpha = 1$.

It is also shown in [4] that $\operatorname{Hyplat} J_k^\alpha = \operatorname{Hyplat} J_k = \operatorname{Hyplat}^c J_k \cup \operatorname{Hyplat}^d J_k$, where

$$\operatorname{Hyplat}^c J_k = \{E_a\colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a := \{f\colon f \in W_p^k[0,1], f = 0 \text{ for } x \in [0,a]\} \tag{3}$$

is a continuous chain and $\operatorname{Hyplat}^d J_k = \{E_l^k\}_{l=0}^k$ with $E_k^k := W_p^k[0,1]$ and

$$E_l^k = \{f \in W_p^k[0,1]\colon f(0) = \cdots = f^{(k-l-1)}(0) = 0\}, \qquad l \in \{0,1,\ldots,k-1\} \tag{4}$$

is a discrete chain.

In [11] several results from [4] has been generalized to the case of Liouville spaces $L_p^s[0,1]$ ($s > 0$).

In the paper under consideration we extend some results mentioned above to the case of the Sobolev spaces $W_p^s[0,1]$ ($s > 0$). For integer $s = k \in \mathbb{Z}_+$ our results coinside with that from [4]. We apply and generalize the method proposed in [4].

Note, that the description of the lattices $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$ and $\operatorname{Hyplat} J_s^\alpha$ depends on the embedding index of the space $W_p^s[0,1]$ in $C^k[0,1]$. For instance, the lattices $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$ and $\operatorname{Lat} J_k^\alpha$ coinside ($k = [s]$, $s - k \le 1/p$).

2. Notations

$W_p^k[0,1]$ stands for the Sobolev space: $f \in W_p^k[0,1]$ if f has $k-1$ absolutely continuous derivatives and $f^{(k)} \in L_p[0,1]$.

Let $s \in \mathbb{R}_+$, $s = [s] + \varepsilon$. $W_p^s[0,1]$ $(1 \le p < +\infty)$ stands for the Sobolev space: $f \in W_p^s[0,1]$ if $f \in W_p^{[s]}[0,1]$ and for derivative $f^{([s])}$ of the order $[s]$ is fulfilled

$$\langle f^{([s])}\rangle_{p,\varepsilon} = \left(\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{|f^{([s])}(x) - f^{([s])}(y)|^p}{|x-y|^{1+p\varepsilon}}\,dy\right)^{1/p} < +\infty.$$

Let $C_0^\infty[0,1] = \{f \in C^\infty[0,1] : f^{(j)}(0) = 0,\ j \in \mathbb{Z}_+\}$. We denote by $W_{p,0}^s[0,1]$ the closure of the lineal $C_0^\infty[0,1]$ in $W_p^s[0,1]$.

3. Cyclic subspaces of the operator J^α

Let $J_{s,0}^\alpha$ and J_s^α stand for the operator J^α defined on $W_{p,0}^s[0,1]$ and $W_p^s[0,1]$ respectively. In what follows we assune that either $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ or $\operatorname{Re}\alpha > k - \frac{1}{p}$. Under this assumption the operator J_s^α is well defined on $W_p^s[0,1]$.

Definition 1. ([9]) Recall that a subspace E of a Banach space X is called a cyclic subspace for an operator $T \in [X]$ if $\operatorname{span}\{T^n E\colon n \ge 0\} = X$.
The set of all cyclic subspaces of an operator T is denoted by $\operatorname{Cyc}(T)$.
A vector $f \in X$ is called a cyclic vector if $E := \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}\} \in \operatorname{Cyc}(T)$

$\mu_T := \inf_E\{\dim E\colon E \in \operatorname{Cyc}(T)\}$ is called the spectral multiplicity of an operator T in X.

An operator T is called cyclic if $\mu_T = 1$.

Lemma 1. *Let* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Then the operator* $J_{s,0}^\alpha$ *is cyclic. Moreover the following equivalence holds:*

$$f \in \operatorname{Cyc} J_{s,0}^\alpha \iff \int_0^\varepsilon |f(x)|^p\,dx > 0 \quad \textit{for all} \quad \varepsilon > 0. \tag{5}$$

In what follows we denote

$$k = \begin{cases} [s], & s - [s] \le 1/p, \\ [s] + 1, & s - [s] > 1/p. \end{cases} \tag{6}$$

Now we present a description of the cyclic subspaces of the operator J_s^α.

Proposition 1. 1) The spectral multiplicity $\mu_{J_s^\alpha}$ of J_s^α is

$$\mu := \mu_{J_s^\alpha} = \begin{cases} \min\{\alpha, k\}, & \alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, \\ k, & \alpha \notin \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{7}$$

2) The system $\{f_j\}_1^N$ of vectors $f_j \in W_p^s[0,1]$ generates a cyclic subspace for J_s^α if and only if:

i) $N \ge \mu$

ii) $\operatorname{rank} W_\mu\{f_1,\dots,f_N\}(0) = \mu$, where

$$W_\mu\{f_1,\dots,f_N\}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_N(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_N'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(\mu-1)}(x) & \dots & f_N^{(\mu-1)}(x) \end{pmatrix}$$

We note (see the embedding theorem [1]), that the space $W_p^s[0,1]$ is continuously embedded to the space $C^{[s]}[0,1]$ for $\{s\} > 1/p$. Hence the codimention of the subspace $W_{p,0}^s[0,1]$ in $W_p^s[0,1]$ is equal $\dim W_p^s[0,1]/W_{p,0}^s[0,1] = \begin{cases} [s], & \text{for } \{s\} = s - [s] \le 1/p, \\ [s] + 1, & \text{for } \{s\} = s - [s] > 1/p. \end{cases}$

Example 1. The system $\{f_1 = 1 + x^{10}, f_2 = x + x^{20}\}$ generates a cyclic subspace in $W_p^s[0,1]$ for J_s^3 if $1 + 1/p < s \le 2 + 1/p$ and does not generate it if $s > 2 + 1/p$.

4. Invariant subspaces of the operator J^α

Definition 2. Let X be a Banach space. An operator $T \in [X]$ is called unicellular if its lattice of invariant subspaces $\operatorname{Lat} T$ is linearly ordered.

Lemma 2. *Let* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Then*

$$\operatorname{Lat} J_{s,0}^\alpha = \{E_a^s : 0 \le a \le 1\}, \quad E_a^s = \{f \in W_{p,0}^s[0,1] : f(x) = 0 \text{ for } x \in [0,a]\} \tag{8}$$

and thus $J_{s,0}^\alpha$ *is unicellular.*

Our description of $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$ is based on the description of the lattice $\operatorname{Lat} Q$ for a nilpotent operator $Q \in [\mathbb{C}^k]$ obtained by L. Brickman and P. A. Fillmore [2].

For each bounded operator T defined on a Banach space X, $(T \in [X])$ and $E \in \operatorname{Lat} T$ we denote by $\hat{T}_E$ the quotient operator acting on the quotient space X/E according to the natural rule $\hat{T}\hat{f} = \widehat{(Tf)}$, where $\hat{f}$ stands for a coset $\hat{f} := f + E$.

Theorem 1. *Let* π *be the quotient map,*

$$\pi \colon W_p^s[0,1] \to X_k := W_p^s[0,1]/W_{p,0}^s[0,1],$$

and $\hat{J}_s^\alpha$ *be the quotient operator on* X_k, *where* k *is defined by (6).*

Then $\operatorname{Lat} J_s^\alpha = \operatorname{Lat}^c J_s^\alpha \cup \operatorname{Lat}^d J_s^\alpha$, *where*

1)

$$\operatorname{Lat}^c J_s^\alpha = \{E_a^s \colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a^s = \{f \in W_{p,0}^s[0,1] \colon f(x) = 0 \text{ for } x \in [0,a]\} \tag{9}$$

is a "continuous part"of $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$;

2)

$$\operatorname{Lat}^d J_s^\alpha = \pi^{-1}(\operatorname{Lat} \hat{J}_s^\alpha) = \bigcup_M \pi^{-1}\{[M, (\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M] \colon M \in \operatorname{Lat}(\hat{J}_s^\alpha | \hat{J}_s^\alpha M)\} \tag{10}$$

is a "discrete part"of $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$.

Here $[M, (\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M]$ *is a closed interval in the lattice of all subspaces of* X_k. *Each interval satisfies the equation*

$$\dim(\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M - \dim M = d,$$

where $d = \min\{-[-\alpha], k\}$.

Corollary 1. *Let* $0 < s \le 1 + 1/p$ *and* $\operatorname{Re}\alpha > s - \frac{1}{p}$. *Then*

$$\operatorname{Lat} J_s^\alpha = \operatorname{Lat} J_{s,0}^\alpha \cup W_p^s[0,1] = \{E_a \colon 0 \le a \le 1\} \cup W_p^s[0,1].$$

In particular, the operator J_s^α *is unicellular in* $W_p^s[0,1]$.

Corollary 2. *Let* $s > 1 + 1/p$ *and either* $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ *or* $\operatorname{Re}\alpha > s - \frac{1}{p}$.

Then: 1) the operator J_s^α *is unicellular in* $W_p^s[0,1]$ *if and only if* $\alpha = 1$;

2) $\operatorname{Lat} J_s = \operatorname{Lat}^c J_s \cup \operatorname{Lat}^d J_s$, *where* $\operatorname{Lat}^c J_s$ *is defined by* (9) *and*

$$\operatorname{Lat}^d J_s = \{W_{p,0}^s[0,1] = E_0^s \subset E_1^s \subset \cdots \subset E_k^s := W_p^s[0,1]\},$$

where

$$E_l^s := \operatorname{span}\{W_{p,0}^s[0,1], x^{k-1}, \ldots, x^{k-l}\}, \quad l \in \{1, \ldots, k\}.$$

Here k *is defined by (6).*

5. Commutant $\{J_s^\alpha\}'$ and the lattice Hyplat J_s^α

As usual $\{T\}'$ stands for the commutant of the operator $T \in [X]$ defined on a Banach space X: $\{T\}' = \{R \in [X]\colon RT = TR\}$. A subspace $E \in \operatorname{Lat} T$ is called a hyperinvariant subspace for T if E is invariant for any $R \in \{T\}'$.
Hyplat T stands for the lattice of all hyperinvariant subspaces of T.
We will say that the lattice Hyplat T is unicellular if it is linearly ordered.

Proposition 2. Let $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Then $R \in \{J_{s,0}^\alpha\}'$ if and only if R is bounded and

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x r(x-t)f(t)\,dt, \qquad r(x) \in L_{p'}[0,1], \quad (p')^{-1} + p^{-1} = 1.$$

Corollary 3. *The lattices of invariant and hyperinvariant subspaces of the operator* $J_{s,0}^\alpha$ *coinside:*

$$\operatorname{Hyplat} J_{s,0}^\alpha = \operatorname{Lat} J_{s,0}^\alpha = \{E_a^s\colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a^s = \{f \in W_{p,0}^s[0,1]\colon f(x) = 0, x \in [0,a]\}.$$

Now we present a description of the commutant $\{J_s^\alpha\}'$.

Theorem 2. *Let either* $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ *or* $\operatorname{Re}\alpha > s - \frac{1}{p}$. *Then* $R \in \{J_s^\alpha\}'$ *if and only if*

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x r(x-t)f(t)\,dt, \qquad r(x) \in W_p^s[0,1].$$

In particular, $\{J_s^\alpha\}'$ *is a commutative algebra and does not depend on* α.

To prove the theorem we consider the block-matrix representation of the operator J_s^α with respect to the direct sum decomposition $W_p^s[0,1] = W_{p,0}^s[0,1] \dot{+} X_k$ (see [4]).

Remark 1. For $s = 0$, that is for the space $L_p[0,1] =: W_p^0[0,1]$, Proposition 2 and Theorem 2 have been obtained by M. Malamud in [8].

Corollary 4. *The double commutant* $\{J_s^\alpha\}''$ *of the operator* J_s^α *coinsides with its commutant:* $\{J_s^\alpha\}'' = \{J_s^\alpha\}' = \{J_s\}' = \{J_s\}''$.

Combining Corollary 2 with Corollary 4 we easily get

Proposition 3. The lattice Hyplat J_s^α is unicellular, that is Hyplat $J_s^\alpha = \operatorname{Lat} J_k$.

Combining Corollary 1 with Corollary 4 we arrive at the following cours

Corollary 5. *Let* $\alpha \ne 1$. *Then* Hyplat $J_s^\alpha = \operatorname{Lat} J_s^\alpha$ *if and only if* $0 \le s \le 1 + 1/p$.

Corollary 6. *Let* $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $k - 1 < s \le k$, $\alpha \le k$. *Then*

$$\operatorname{Hyplat}^d J_s^\alpha = \pi^{-1}(\operatorname{Hyplat} J^\alpha(0;k))$$

if and only if k *is odd and* $\alpha = 2$.

Example 2. Let $3 + 1/p < s \le 4 + 1/p$, $\alpha = 2$ and $J_s^2\colon W_p^s[0,1] \to W_p^s[0,1]$. Then $\operatorname{Hyplat}^d J_s^2 = \operatorname{Lat}^d J_s^2 = \{E_0^s, E_1^s, E_2^s, E_3^s, E_4^s\}$, but $\pi^{-1}(\operatorname{Hyplat} J^2(0;s)) = \{E_0^s, E_2^s, E_4^s\}$.

Theorem 2 allows us to present a description of the algebra $\operatorname{Alg} J_s^\alpha$.

Proposition 4. The following are true:
1) If either $\alpha = 1$ or $s \le 1 + 1/p$, then $\operatorname{Alg} J_s^\alpha = \{J_s^\alpha\}''$;
2) If $1 + 1/p < \alpha \le s$, then $\operatorname{Alg} J_s^\alpha = \{T = cI + R\colon c \in \mathbb{C}, R \in \operatorname{Alg}_0 J_s^\alpha\}$, where

$$\operatorname{Alg}_0 J_s^\alpha = \{R\colon Rf = r * f, \quad r \in W_p^{s-1}[0,1], \quad r^{(j)}(0) = 0 \quad \text{for } j \ne i\alpha - 1, \quad i \le \left[\frac{s}{\alpha}\right]\};$$

3) If $s > 1 + 1/p$ and $\operatorname{Re}\alpha > s - \frac{1}{p}$, then

$$\operatorname{Alg} J_s^\alpha = \{T = cI + R\colon c \in \mathbb{C}, \quad Rf = r * f, \quad r \in W_{p,0}^{s-1}[0,1]\}.$$

Corollary 7. *Let T be a bounded operator on $W_p^s[0,1]$ and $\hat{T}$ be a quotient operator defined on $\mathbb{C}^k \cong W_p^s[0,1]/W_{p,0}^s[0,1]$, where k is defined by (6). Then $T \in \operatorname{Alg} J_s^\alpha$ if and only if the quotient operator*

$$\hat{T} \in \operatorname{Alg}(J(0;s)^\alpha) = \{J(0;s)^\alpha\}''.$$

References

[1] Besov O. V., Il'in V. P., Nikol'skii S. M. *Integral representation of function and theembedding theorem.* Moscow: "Nauka", 1975.

[2] Brikman L., Fillmore P. A. *The invariant subspace lattice of a linear transformation.* // Canad. J. Math. - 1967. - **19.** - P. 810–822.

[3] Brodskii M. S. *Triangular and Jordan Representations of Linear operators.* Transl. Math. Monographs 32, Amer. Math. Soc.: Providence RI, 1971.

[4] Domanov I. Yu., Malamud M. M. *Invariant and hyperinvariant subspaces of an operator J^α and related operator algebras in Sobolev spaces.* // Lin. Alg. App., - 2002. - **348**, No. 1-3. - P. 209–230.

[5] Gohberg I. C., Krein M. G. *Theory and Applications of Volterra operators in Hilbert space.* Transl. Math. Monographs 24, Amer. Math. Soc.: Providence RI, 1970.

[6] Gohberg I., Lancaster P., Roadman L. *Invariant subspaces of matrices with applications.* — New York: Wiley, 1987. - 692 p.

[7] Halmosh P. R. *Eigenvectors and adjoints.* // Linear Algebra and its Applications. - 1971., - **4.** - P. 11–15.

[8] Malamud M. M. *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators.* // Operator Theory: Advances and Applications. - 1998. -**102.** - P. 137–161.

[9] Nicol'skii N. K. *Treatise on the Shift Operator.* Berlin, Springer-Verlag, 1986.

[10] Nikolskii N. K., Vasjunin V. I. *Control subspaces of minimal dimensions. Unitary and model operators.* // J. Operator Theory. - 1981. - **10.** - P. 307–330.

[11] Romashchenko G. S. *Invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J^α in the Liouville spaces.* //Dopovidi NAN Ukraine. - 2003. N 3.

[12] Tsekanovskii E. R. *About description of invariant subspaces and unicellularity of the integration operator in the space $W_2^{(p)}$* // Uspehi Mat. Nauk. - 1965. - **6**(126). - P. 169–172.

G. S. Romashchenko, Department of mathematics. Donetsk National University. Donetsk, Ukraine

E-mail: max@anahoret.com

ON ENTIRE FUNCTIONS OF CARTWRIGHT CLASS WITH A FINITE NUMBER OF SINGULARITIES.

K. K. Simonov
Donetsk National University
Donetsk, Ukraine

The Cartwright class consists of entire function of finite exponential type such that the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+|f(t)|}{1+t^2}dt$ converges. In the present paper, a generalization of the Cartwright class for functions with a finite number of singularities is given. M. G. Krein's criterion for a function f to be from the Cartwright class is extended to the case where the function f has a finite number of singularities. A necessary and sufficient conditions for a function f with a finite number of singularities to be an element of a generalized Nevanlinna matrix is given.

Keywords: Entire functions, Cartwright class, Nevanlinna functions, Nevanlinna matrices

1. Functions of Cartwright class

Let f be a holomorphic function in a simply connected domain D. The function f is called a Nevanlinna function if the function $\ln|f(z)|$ admits a positive harmonic majorant (see [6, 2]). Denote by $\mathcal{N}(D)$ the set of all Nevanlinna function in the domain D.

An entire function f is said to belong to the Cartwright class $\mathcal{C}$ if

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+|f(t)|}{1+t^2}dt < \infty \quad \text{and} \quad \overline{lim}_{z\to\infty}\frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty$$

(see [6, 8]).

The following theorem is due to M. G. Krein.

Theorem 1 (see [6]). *An entire function f belongs to the class $\mathcal{C}$ if and only if f belongs to the classes $\mathcal{N}(\mathbb{C}_+)$ and $\mathcal{N}(\mathbb{C}_-)$.*

In this note we generalize this result as well as several other results from [6, 7] to the case of holomorphic functions with a finite number of singularities. This generalization is motivated by some new interpolation problems considered recently in [3, 5, 9] (see also a survey [4]).

Take N points $\{x_j\}_1^N$ on the real line and set

$$\mathbf{G} = \mathbb{C} \setminus \{x_j\}_1^N .$$

Denote by $\mathcal{H}(\mathbf{G})$ the set of all holomorphic functions in the domain $\mathbf{G}$.

Definition 1. We say that a function $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G})$ belongs to the generalized Cartwright class $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ if

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+|f(t)|}{1+t^2}dt < \infty, \tag{1}$$

$$\overline{lim}_{z\to\infty}\frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty, \qquad \overline{lim}_{z\to\infty}|z-x_j|\ln|f(z)| < \infty \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

The following theorem allows us to restate many propositions for the class $\mathcal{C}(\mathbf{G})$.

Theorem 2. *Suppose a function $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G})$ belongs to the class $\mathcal{N}(\mathbb{C}_+)$. Then f admits the representation*

$$f(z) = f_0(z) \cdot f_1\left(\frac{1}{x_1 - z}\right) \cdot \ldots \cdot f_N\left(\frac{1}{x_N - z}\right),$$

where f_0, f_1, ..., f_N are entire functions of class $\mathcal{N}(\mathbb{C}_+)$.

In particular, this implies the following generalization of Theorem 1.

Theorem 3. *A function $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G})$ belongs to the class $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ if and only if f belongs to the classes $\mathcal{N}(\mathbb{C}_+)$ and $\mathcal{N}(\mathbb{C}_-)$.*

2. Functions of Krein class

A matrix $W(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$ is called a Nevanlinna matrix if the matrix elements A, B, C, D are entire transcendental functions and the following conditions hold:

(A) $A(z)D(z) - B(z)C(z) \equiv 1$.

(B) For any $t \in \mathbb{R}$, the function $w(z;t) = \dfrac{A(z)t + B(z)}{C(z)t + D(z)}$ is a holomorphic function in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and satisfies the inequality $\dfrac{\operatorname{Im} w(z;t)}{\operatorname{Im} z} \geq 0$ for any $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

See [1] for references to Nevanlinna matrices and their applications in the classical moment problem.

An entire function f belongs to the Krein class $\mathcal{K}$ if f is real, its zeros are real, and f admits the absolute convergent expansion

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{A_0}{z} + z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(z - \alpha_k)\alpha_k} + B. \tag{3}$$

The elements of Nevanlinna matrices are described by the following theorem due to M. G. Krein.

Theorem 4 (see [7]). *The set of all elements of Nevanlinna matrices coincides with the class $\mathcal{K}$ and is contained in the class $\mathcal{C}$.*

We generalize the class $\mathcal{K}$ to the functions with a finite number of singulatiries.

Definition 2. We say that a matrix function

$$W(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbf{G})$$

is a generalized Nevanlinna matrix if its elements are transcendental functions holomorphic in $\mathbf{G}$, and the conditions (A) and (B) hold.

Definition 3. We say that a function $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G})$ belongs to the class $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ if f is real, its zeros $\{\alpha_k\}_1^\infty$ are real, and f admits the absolute convergent expansion

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{1 + \alpha_k z}{z - \alpha_k} + B + Cz, \tag{4}$$

where

$$\alpha_k, A_k, B, C \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty.$$

Theorem 5. *The set of all elements of generalized Nevanlinna matrices coincides with the class $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ and is contained in the class $\mathcal{C}(\mathbf{G})$.*

Remark 2. The class $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ is invariant under the transformations

$$\zeta = \frac{1 + x_j z}{z - x_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Remark 3. It is possible to describe the class $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ with the alternative expansion

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{\alpha_k \in Z'} A_k \frac{1}{z - \alpha_k} + z \sum_{\alpha_k \in Z_\infty} \frac{A_k}{(z - \alpha_k)\alpha_k} + B + Cz,$$

instead of the expansion (4). Here the zero set of the function f is divided into two parts Z' and Z_∞ such that Z' is bounded and Z_∞ does not have finite accumulation points.

Remark 4. In the expansion (4), $C \neq 0$ if and only if the function f is holomorphic at the infinite point and $f(\infty) = 0$.

References

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, GIFML, Moskow, 1961.

[2] G. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.

[3] E. Hendriksen and C. Nijhuis, *Laurent–Jacobi matrices and the strong Hamburger moment problem*, Acta Appl. Math. **61** (2000), 119–132.

[4] William B. Jones and Olaf Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and strong moment theory: a survey*, Journal of computational and applied mathematics **105** (1999), 51–91.

[5] I. S. Kats and A. A. Nudelman, *Strong Stieltjes moment problem*, St. Peterburg Math. J. **8** (1997), no. 6, 931–950.

[6] M. G. Krein, *On the theory of entire function of exponential type*, Izv. Akad. Nauk SSSR **11** (1947).

[7] M. G. Krein, *On the indefinite case of the Sturm–Liouville boundary problem in the interval* $(0, \infty)$, Izv. Akad. Nauk SSSR **16** (1952), no. 5, 293–324.

[8] B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[9] K. K. Simonov, *Strong Hamburger moment problem*, Uch. Zapiski TNU **15** (2002), no. 1, 36–38.

Department of Mathematics, Donetsk National University, 24 Universitetskaya, 83055 Donetsk, Ukraine

E-mail: kirill_simonov@mail.ru

Section 1

SPECTRAL PROBLEMS

Subsection 1.2

Spectral Theory of Operator Pencils

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ МОРЯ.

Э.И.Белоусова
Черноморский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова
г.Севастополь, Украина
Белоусов В.В.
Морской Гидрофизический Институт Академии Наук Украины
г.Севастополь, Украина

Впервые автомодельное решение задачи о расчете скорости течения в однородном море было получено в работе [1]. Установлена ассимметричность реакции воды относительно направления ветра. Показано, что ослабевающиий от берега ветер (бриз) формирует течение, скорость которого при сгоне больше, чем при нагоне. В настоящей работе исследуется влияние неравномерного ветра на структуру течений в неоднородном море. Установлена автомодельность процесса, когда дно прибрежной зоны представляет собой наклонную плоскость, а скорость ветра и температура убывают при удалении от берега.

Направим ось Y вдоль прямолинейного берега, ось X - перпендикулярно к нему, ось Z - вертикально вниз. Начало координат поместим на невозмущенной поверхности моря. Предполагая, что вдоль берега характеристики течения не меняются, запишем уравнения движения, состояния, неразрывности, диффузии тепла и граничные условия в виде [2]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = g\frac{d\zeta}{dx} - \frac{g}{\rho_0}\int\limits_0^z \frac{\partial \rho}{\partial x}dz + A\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial \tau}{\partial x} + w\frac{\partial \tau}{\partial z} = K\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}, \tag{3}$$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\tau), \tag{4}$$

$$z = 0 \qquad A\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{T_x}{\rho_0}, \qquad w = 0, \tag{5}$$

$$a_0\frac{\partial \tau}{\partial z} + b_0\tau = \Gamma_0, \tag{6}$$

$$z = H \qquad u = w = 0, \tag{7}$$

$$a_H\frac{\partial \tau}{\partial n} + b_H\tau = \Gamma_H, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^H u dz = 0, \tag{9}$$

где u, w - составляющие скорости течения вдоль осей X, Z - соответственно; ζ - отклонение поверхности моря от горизонтального положения; g - ускорение силы тяжести; A - кинематический коэффициент вертикального обмена количеством движения; K - коэффициент вертикальной турбулентной диффузии; $H = H(x)$ -глубина; T_x - тангенциальное напряжение ветра; ρ и τ - плотность и температура воды соответственно; $\rho_0 = 1$ г·см$^{-3}$

; $a_0, \mathrm{b}_0, \Gamma_0, a_H, \mathrm{b}_{\mathrm{H}}, \Gamma_H$ - известные функции; $\alpha = -2,5 \cdot 10^{-4}$град$^{-1}$ -константа; n- внешняя нормаль.

В постановке задачи (1)-(9) сделаны следующие предположения.

Уравнение движения (1) получено с помощью уравнения гидростатики, которое для этой цели проинтегрировано по вертикальной координате в пределах от ζ до z, а затем продифференцировано по x. В результате получено выражение для горизонтального градиента давления через наклон уровня и плотность морской воды:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g\frac{d\zeta}{dx} - \frac{g}{\rho_0}\int\limits_0^z \frac{\partial \rho}{\partial x} dz.$$

Величина ζ считается малой по сравнению с глубиной H. Это позволяет сформулировать условия на невозмущенной поверхности моря. Кинематическое соотношение $w = u\frac{d\zeta}{dx}$ принято в виде $w = 0$.

Известно [3] , что поток тепла через поверхность моря является функцией температуры: $K\frac{\partial \tau}{\partial z} = f(\tau, x)$. В соотношении (6) принята линейная зависимость. Те же соображения использованы при записи граничного условия (8). При конкретных расчетах далее использовались частные случаи граничных условий (6),(8): на поверхности моря заданы значения температуры $\tau = \tau_0(x)$, а на дне - отсутствие потока тепла $\frac{\partial \tau}{\partial n} = 0$.

Из рассмотрения исключен вопрос о течениях в узкой зоне берега, где уровеньζ имеет тот же порядок, что и глубина H и где происходит смещение береговой черты. Поэтому на некотором удалении от берега ставится так называемое смягченное граничное условие: $\int\limits_0^H u dz = 0$ при $x = 0$. Это условие означает отсутствие у берега моря расхода воды в направлении нормали к береговой черте. Интегрируя по z уравнение неразрывности (2) от поверхности до дна и, учитывая это граничное условие, можно убедиться, что условие (9) справедливо не только при $x = 0$, но и для любого $x = const$. Условие (9) служит для определения неизвестного наклона уровня $\frac{d\zeta}{dx}$ [4].

Уравнение неразрывности (2) позволяет ввести функцию тока, определяемую формулами

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{10}$$

Подставляя соотношения (10) в уравнения (1), (4) и граничные условия (5), (7), (9), получим

$$A\frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -g\frac{d\zeta}{dx} + \frac{g}{\rho_0}\int\limits_0^z \frac{\partial \rho}{\partial x} dz, \tag{11}$$

$$K\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

$$z = 0 \qquad A\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{T_x}{\rho_0}, \tag{13}$$

$$\Psi = 0, \tag{14}$$

$$z = H \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

$$\Psi = 0. \tag{16}$$

Подставляя (10) в условие (9) можно убедиться, что значения функции тока Ψ при $z = 0$ и при $z = H$ одинаковы. Условия прилипания на дне (7) означают, что $\Psi = 0$ при $z = H$. Отсюда следует справедливость условия (14).

Проведем “спрямление” дна моря, переходя от вертикальной координаты z к безразмерной вертикальной координате η. Используем следующее преобразование [5]:

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{z}{H}. \tag{17}$$

Производные функций по координатам x и z заменяются производными по координатам ξ, η согласно формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\frac{dH}{d\xi}}{H}\eta\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{H^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \tag{18}$$

После преобразований (17), (18) система уравнений (11), (12) и граничных условий (13) - (16) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{A}{H^3}\frac{\partial^3\Psi}{\partial\eta^3} - \frac{1}{H^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\frac{dH}{d\xi}}{H^3}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = \\ = -g\frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{gH}{\rho_0}\int\limits_0^\eta\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\eta - \frac{g}{\rho_0}\frac{\frac{dH}{d\xi}}{H}\eta\rho + \frac{g}{\rho_0}\frac{dH}{d\xi}\int\limits_0^\eta\rho d\eta,\end{gathered} \tag{19}$$

$$\frac{K}{H^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2} - \frac{1}{H}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial\tau}{\partial\xi} - \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\right) = 0, \tag{20}$$

$$\eta = 0 \qquad\qquad \frac{1}{H^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = \frac{T_x}{\rho_0}, \tag{21}$$

$$\Psi = 0, \tag{22}$$

$$\frac{a_0}{H}\frac{\partial\tau}{\partial\eta} + b_0\tau = \Gamma_0, \tag{23}$$

$$\eta = 1 \qquad\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = 0, \tag{24}$$

$$\Psi = 0, \tag{25}$$

$$a_H\frac{\partial\tau}{\partial n} + b_H\tau = \Gamma_H. \tag{26}$$

Будем искать решение системы (19) - (26) в виде

$$\Psi = f(\xi)\varphi(\eta), \qquad\qquad \tau = \mathrm{Q}(\xi)\mathrm{R}(\eta). \tag{27}$$

Подставляя формулы (27) в систему, получим

$$\begin{gathered}\frac{d^3\varphi}{d\eta^3} + \frac{H}{A}\frac{df}{d\xi}\varphi\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{H}{A}\left[\frac{f}{H}\frac{dH}{d\xi} - \frac{df}{d\xi}\right]\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 = \\ = -\frac{gH^3}{Af}\frac{d\varsigma}{d\xi} - \frac{g\alpha QH^3}{Af}\frac{dH}{d\xi}R\eta + \frac{g\alpha H^3}{Af}\left(H\frac{dQ}{d\xi} + Q\frac{dH}{d\xi}\right)\int\limits_0^\eta Rd\eta,\end{gathered} \tag{28}$$

$$\frac{d^2R}{d\eta^2} + \frac{df}{d\xi}\cdot\frac{H}{K}\varphi\frac{dR}{d\eta} - \frac{fH}{KQ}\frac{dQ}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\eta}R = 0. \tag{29}$$

$$\eta = 0 \qquad\qquad \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = -\frac{T_xH^2}{\rho_0 Af}, \tag{30}$$

$$\varphi = 0, \tag{31}$$

$$\frac{Qa_0}{H}\frac{dR}{\partial\eta}+b_0QR=\Gamma_0, \tag{32}$$

$$\eta=1 \qquad \varphi=0, \tag{33}$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta}=0, \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{Q}a_H}{H}\left(n_z-n_x\frac{dH}{d\xi}\right)\frac{dR}{d\eta}+\left(a_Hn_x\frac{dQ}{d\xi}+b_HQ\right)R=\Gamma_H, \tag{35}$$

где n_x и n_z - направляющие косинусы нормали к профилю дна.

Предположим, что коэффициенты

$$\begin{aligned}
&c_1=\frac{H}{A}\frac{df}{d\xi}; \quad \mathrm{c}_2=\frac{f}{A}\frac{dH}{d\xi}-c_1; \quad \mathrm{c}_6=\frac{T_xH^2}{\rho_0Af};\\
&c=-\frac{gH^3}{Af}\frac{d\zeta}{d\xi}; \quad \mathrm{c}_{10}=\frac{g\alpha QH^3}{Af}\frac{dH}{d\xi};\\
&c_{11}=-\frac{g\alpha H^3}{Af}\left(H\frac{dQ}{d\xi}+Q\frac{dH}{d\xi}\right);\\
&c_{12}=\frac{df}{d\xi}\frac{H}{K}; \quad \mathrm{c}_{13}=\frac{fH}{KQ}\frac{dQ}{d\xi}; \quad \mathrm{c}_{14}=\frac{Qa_0}{H};\\
&c_{15}=b_0Q; \quad \mathrm{c}_{16}=\frac{a_HQ}{H}\left(n_z-n_x\frac{dH}{d\xi}\right); \quad c_{17}=a_Hn_x\frac{dQ}{d\xi}
\end{aligned} \tag{36}$$

не зависят от горизонтальной координаты ξ . Тогда задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений по вертикальной координате η

$$\frac{d^3\varphi}{d\eta^3}+c_1\varphi\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+c_2\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2+c_{10}R\eta-c_{11}\int\limits_0^\eta Rd\eta=c, \tag{37}$$

$$\frac{d^2R}{d\eta^2}+c_{12}\varphi\frac{dR}{d\eta}-c_{13}\frac{d\varphi}{d\eta}R=0, \tag{38}$$

$$\eta=0 \qquad \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}=-c_6, \tag{39}$$

$$\varphi=0, \tag{40}$$

$$c_{14}\frac{dR}{d\eta}+c_{15}R=\Gamma_0, \tag{41}$$

$$\eta=1 \qquad \frac{d\varphi}{d\eta}=0, \tag{42}$$

$$\varphi=0, \tag{43}$$

$$c_{16}\frac{dR}{d\eta}+c_{17}R=\Gamma_H. \tag{44}$$

В соотношениях (36) $c_1, c_2, \ldots c_{13}$ являются постоянными. Коэффициенты $c_{14}, \ldots c_{17}$ могут зависеть от координаты ξ таким же образом, как величины Γ_0, ..., Γ_H. Величина c есть константа, которая определяет наклон уровня по формуле:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{Afc}{gH^3}. \tag{45}$$

Введем безразмерную функцию $\bar{\varphi}$ с помощью соотношения

$$\varphi = \varphi_0 \bar{\varphi}, \qquad \varphi_0 = |c_6| \tag{46}$$

Выбирая Q величиной, размерность которой совпадает с температурой, получим, что R - величина безразмерная. Подставляя (46) в систему (37)- (44), приведём её к безразмерному виду

$$\frac{d^3\bar{\varphi}}{d\eta^3} + \bar{c}_1\bar{\varphi}\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\eta^2} + \bar{c}_2\left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\eta}\right)^2 + \bar{c}_{10}\eta R - \bar{c}_{11}\int\limits_0^\eta R d\eta = \bar{c}, \tag{47}$$

$$\frac{d^2R}{d\eta^2} + \bar{c}_{12}\bar{\varphi}\frac{dR}{d\eta} - \bar{c}_{13}\frac{d\bar{\varphi}}{d\eta}R = 0, \tag{48}$$

$$\eta = 0 \qquad\qquad \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\eta^2} = -signT_x, \tag{49}$$

$$\bar{\varphi} = 0, \tag{50}$$

$$\bar{c}_{14}\frac{dR}{d\eta} + \bar{c}_{15}R = \bar{\Gamma}_0, \tag{51}$$

$$\eta = 1 \qquad\qquad \frac{d\bar{\varphi}}{d\eta} = 0, \tag{52}$$

$$\bar{\varphi} = 0, \tag{53}$$

$$\bar{c}_{16}\frac{dR}{d\eta} + \bar{c}_{17}R = \bar{\Gamma}_H, \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned} &\bar{c}_1 = c_1\,|c_6|\,, \quad \bar{c}_2 = c_2\,|c_6|\,, \quad \bar{c}_{10} = \frac{c_{10}}{|c_6|}, \quad \bar{c}_{11} = \frac{c_{11}}{|c_6|}, \quad \bar{c} = \frac{c}{|c_6|}, \\ &\bar{c}_{12} = c_{12}\,|c_6|\,, \quad \bar{c}_{13} = c_{13}\,|c_6|\,, \quad \bar{c}_{14} = \frac{c_{14}}{Q}, \quad \bar{c}_{15} = \frac{c_{15}}{Q}, \quad \bar{c}_{16} = \frac{c_{16}}{Q}, \quad \bar{c}_{17} = \frac{c_{17}}{Q}. \end{aligned} \tag{55}$$

Преобразуем уравнение (47) . Исключим из него неизвестную константу $\bar{c}$, дифференцируя уравнение по вертикальной координате η:

$$\frac{d^4\bar{\varphi}}{d\eta^4} + \bar{c}_1\frac{d}{d\eta}\left(\bar{\varphi}\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\eta^2}\right) + \bar{c}_2\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\eta}\right)^2 + (\bar{c}_{10} - \bar{c}_{11})\,R + \bar{c}_{10}\eta\frac{dR}{d\eta} = 0. \tag{56}$$

Уравнение (56) при граничных условиях (30), (31), (33), (34) решалось численно. Для этого оно заменялось следующим уравнением

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial^4\bar{\varphi}}{\partial\eta^4} + \bar{c}_1\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\bar{\varphi}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\eta^2}\right) + \bar{c}_2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\eta}\right)^2 + (\bar{c}_{10} - \bar{c}_{11})\,R + \bar{c}_{10}\eta\frac{\partial R}{\partial\eta} = 0, \tag{57}$$

которое решалось методом стационирования. В начальный момент фиктивного времени $t = 0$ принималось $\bar{\varphi} = 0$. Дифференциальное уравнение аппроксимировалось следующим конечно-разностным уравнением [6]:

$$\begin{aligned} &- A_2\bar{\varphi}_{i-2}^{k+1} + A_1\bar{\varphi}_{i-1}^{k+1} - B\bar{\varphi}_i^{k+1} + C_1\bar{\varphi}_{i+1}^{k+1} - C_2\bar{\varphi}_{i+2}^{k+1} + F = 0 \\ &(2 \le \mathrm{i} \le \mathrm{N} - 2) \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
&A_2 = \bar{c}_1 h \bar{\varphi}_{i-1}^k + \bar{c}_2 h \left(\bar{\varphi}_{i-2}^k - \bar{\varphi}_i^k\right)/4 - 2 = 0,\\
&A_1 = 2h\bar{c}_1 \bar{\varphi}_{i-1}^k - 8,\\
&\mathrm{B} = \bar{c}_1 h \left(\bar{\varphi}_{i-1}^k - \bar{\varphi}_{i+1}^k\right) + \frac{\bar{c}_2 h}{4}\left(\bar{\varphi}_{i+2}^k - \bar{\varphi}_{i-2}^k\right) - 12 - \frac{2h^4}{\tau},\\
&C_1 = 2h\bar{c}_1 \bar{\varphi}_{i+1}^k - 8,\\
&C_2 = -\bar{c}_1 h \bar{\varphi}_{i+1}^k - \frac{\bar{c}_2 h}{4}\left(\bar{\varphi}_{i+2}^k - \bar{\varphi}_i^k\right) - 2,\\
&F = -\frac{2h^4}{\tau}\bar{\varphi}_i^k + 2h^4\left(\bar{c}_{10} - \bar{c}_{11}\right) R_i^k + h^3 \eta_i \left(R_{i+1}^k - R_{i-1}^k\right) + \bar{c}_{10},
\end{aligned} \tag{59}$$

где τ - шаг по фиктивному времени; h - шаг по переменной η ; k -номер шага по времени; i- номер рассматриваемой точки; N - число точек. Уравнение (58) решалось методом обобщенной прогонки. При замене граничных условий их разностными приближениями, при необходимости слева и справа от рассматриваемого интервала [0;1] вводились фиктивные точки $i = -1$ и $i = N+1$, которые затем исключались с помощью уравнения (58) и граничных условий (30), (34) записанных в разностной форме. Уравнение (48) заменялось уравнением

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + \bar{c}_{12}\bar{\varphi}\frac{\partial R}{\partial \eta} - \bar{c}_{13}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} R, \tag{60}$$

которое решалось методом стационирования. Дифференциальное уравнение (60) заменялось конечно-разностным уравнением, которое решалось методом прогонки для трехточечных уравнений. В начальный момент фиктивного времени $t = 0$ принималось $R = 1$.

Предположение о том, что коэффициенты c_i, входящие в соотношения (36), являются константами, накладывает определенные ограничения на вид функциональной зависимости от горизонтальной координаты x глубины моря H , тангенциального напряжения ветра T_x, коэффициента обмена количеством движения A , коэффициента турбулентной диффузии тепла K , а также величин a_0, b_0, a_H, b_H.

Рассмотрим частный случай. Тангенциальное напряжение ветра описывается соотношением

$$T_x = \frac{T_{0x}}{\left(1 + \frac{s}{H_0}x\right)^2}.$$

Дно моря представляет собой наклонную плоскость $H = H_0 + sx$.

Коэффициент вертикального обмена A является величиной постоянной [1]:

$$A = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{4\rho_0 k}\left|T_{0x}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot H_0,$$

где $k = 0.02$, $\quad \gamma = 3.25 \cdot 10^{-6} \cdot {}^{-3}$.

Коэффициент турбулентной диффузии тепла K пропорционален коэффициенту обмена $A:\qquad K = \chi A, \qquad 0 < \chi \leqslant 1$.

Положим $a_0 = 0, \quad b_0 = 1, \quad \Gamma_0 = \tau_0$, то есть зададим на поверхности температуру. Зададим $a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad \Gamma_H = 0$, то есть примем, что поток тепла на дне отсутствует. Подставляя принятые соотношения для величин T_x, H, A, K в формулы (36), видим что автомодельное решение вида (27)

$$\psi = f(\xi)\,\varphi(\eta), \qquad \tau = \mathrm{Q}(\xi)\,R(\eta)$$

существует, если

$$f = f^* = const, \quad \mathrm{Q} = \frac{Q_0}{\left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)^3} \quad .$$

Безразмерные коэффициенты $\bar{c}_i$, входящие в уравнения (47), (48), определяются следующими соотношениями

$$\bar{c}_1 = 0; \qquad \bar{c}_2 = \frac{16\rho_0 k^2}{\gamma}s; \qquad \bar{c}_{10} = \frac{g\alpha H_0 Q_0 \rho_0}{|T_{0x}|}s;$$

$$\bar{c}_{11} = -2\bar{c}_{10}; \qquad \bar{c}_{12} = 0; \qquad \bar{c}_{13} = -\frac{3}{\chi}\bar{c}_2;$$

$$\bar{c} = -\frac{\rho_0 g H}{T_x}\frac{d\zeta}{d\xi} \quad .$$

Расчеты выполнены для случая, когда на поверхности моря задана температура воды

$$\tau_0 = \frac{Q_0}{\left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)^3} \quad ,$$

а на дне - отсутствие потока тепла $\frac{\partial \tau}{\partial n} = 0$. Последнее условие для безразмерной функции R имеет вид :

$$\eta = 1 \qquad\qquad \frac{dR}{d\eta} + \frac{3s^2}{s^2+1}R = 0.$$

После определения функций $\bar{\varphi}$ и R характеристики течения и температуры находятся по формулам

$$\psi = \frac{4kH_0 \left|T_{0x}\right|^{1/2}}{\gamma^{1/2}}\bar{\varphi}\left(\eta\right),$$

$$u = \frac{4k\left|T_{0x}\right|^{1/2}}{\gamma^{1/2}\left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)}\bar{u}\left(\eta\right), \qquad \bar{u}\left(\eta\right) = \frac{d\bar{\varphi}}{d\eta},$$

$$w = \frac{4k\left|T_{0x}\right|^{1/2}}{\gamma^{1/2}\left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)}\bar{w}\left(\eta\right), \qquad \bar{w}\left(\eta\right) = s\eta\frac{d\bar{\varphi}}{d\eta},$$

$$\tau = \frac{Q_0}{\left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)^3}R\left(\eta\right).$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{T_x\bar{c}}{\rho_0 g H}, \qquad \bar{c} = \frac{d^3\bar{\varphi}}{d\eta^3} + \bar{c}_1\bar{\varphi}\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\eta^2} + \bar{c}_2\left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\eta}\right)^2 + \bar{c}_{10}\eta R - \bar{c}_{11}\int\limits_0^\eta Rd\eta$$

Рассмотрим случаи.

Термическое течение (ветер отсутствует, $T_{0x} = 0$).

Вода у берега прогрета сильнее, чем вдали от него. Убывание температуры воды на поверхности моря с удалением от берега описывается следующей закономерностью

$$Q = \frac{Q_0}{\left(1 + \frac{s}{H_0}x\right)^3}, \qquad H_0 = 7\cdot 10^2, \qquad Q_0 = 16^o C.$$

На рис.1 приведено вертикальное распределение безразмерных скоростей течения $\bar{u}$, $\bar{w}$ и температуры R, соответствующих наклонам дна $s = 5\cdot 10^{-4}, s = 10^{-3}, s = 2\cdot 10^{-3}$. Видно, что горизонтальная скорость $\bar{u}$ положительна в поверхностном слое; здесь располагается течение, направленное от берега. Ниже располагается противотечение. Скорость термического течения $\bar{u}$ меняет знак на большей глубине ($\eta \sim 0.45$), чем в случае чисто ветрового течения($\eta = 1/3$) . С увеличением наклона дна s скорость $\bar{u}$ увеличивается, противотечение становится интенсивнее, его ядро слегка поднимается. Знаки вертикальной скорости $\bar{w}$ и горизонтальной скорости $\bar{u}$ совпадают: в слое, занятом течением($\bar{u} > 0$), происходит опускание воды ($\bar{w} > 0$), противотечение ($\bar{u} < 0$) сопровождается подъёмом воды($\bar{w} < 0$). С увеличением наклона дна s (и ростом горизонтальной неравномерности распределения температуры) вертикальные движения воды интенсифицируются: $|\bar{w}|$ растет. Профиль температуры R характеризуется ее инверсией в подповерхностном слое и термоклином внизу.

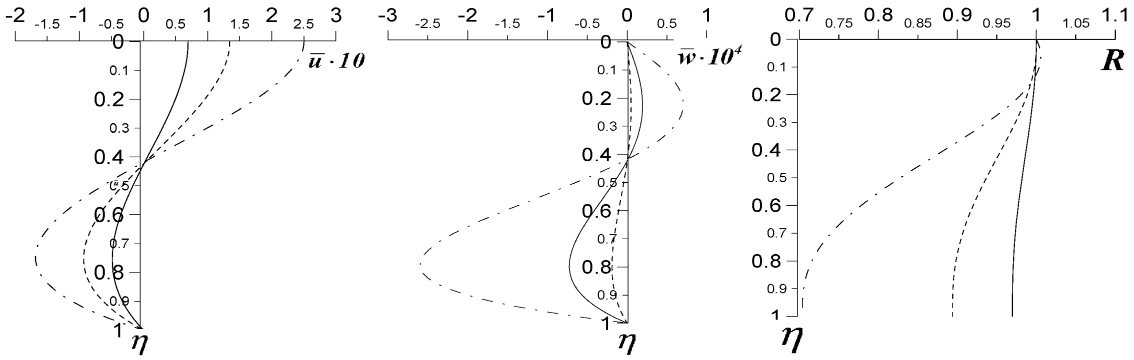

Рис1. Вертикальное распределение безразмерных скоростей течения $\bar{u}, \bar{w}$ и температуры R при $T_{0x} = 0$, $Q = Q_0 \left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)^{-3}$: ——-$s = 5 \cdot 10^{-4}$, - - - -$s = 1 \cdot 10^{-3}$, $- \cdot - \cdot -s = 2 \cdot 10^{-3}$.

Суммарное течение, формируемое действием ветра и неравномерным нагревом воды.

На рис.2 приведены эпюры безразмерных скоростей течения $\bar{u}$, $\bar{w}$ и температуры R: слева для сгонного ветра ($T_{0x} = 1 \cdot {}^{-1} \cdot c^{-2}$) и справа для нагонного ветра($T_{0x} = -1 \cdot {}^{-1} \cdot c^{-2}$).

Видно, что при ветре, дующем с берега (сгон), скорости течения $\bar{u}$ и $\bar{w}$ бо́льше, чем в чисто термическом течении. Качественно эпюры $\bar{u}$ и $\bar{w}$ не меняются: они меняют знак по глубине η один раз. Как и в случае чисто термического течения, профиль температуры R содержит подповерхностный слой инверсии и термоклин. Однако, при наличии ветра диапазон изменений температуры с глубиной больше.

При ветре, дующем к берегу (нагон), эпюры скоростей $\bar{u}$ и $\bar{w}$ качественно отличны от случаев термического и сгонного течений: скорости $\bar{u}$ и $\bar{w}$ в зависимости от параметра s могут дважды менять знак с глубиной. Кроме того, противотечение может выходить на поверхность. При действии нагонного ветра подповерхостный слой инверсии температуры отсутствует; образуется квазиоднородный слой. Диапазон изменений температуры с глубиной меньше, чем при сгоне.

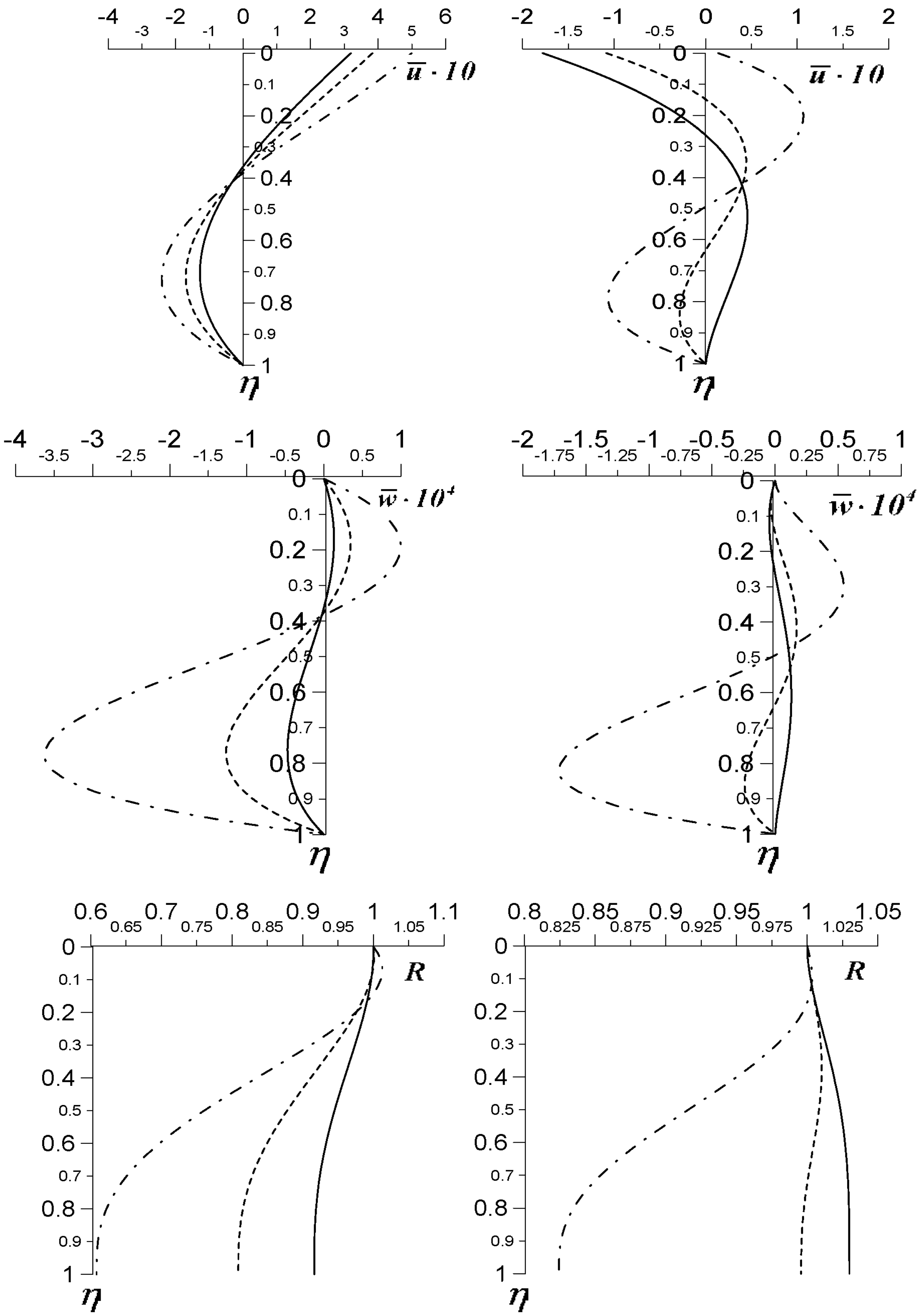

Рис2. Вертикальное распределение безразмерных скоростей течения $\bar{u}, \bar{w}$ и температуры R при $T_{0x} = 1 \cdot {}^{-1} \cdot c^{-2}$(слева) и $T_{0x} = -1 \cdot {}^{-1} \cdot c^{-2}$(справа), $Q = Q_0 \left(1 + \frac{s}{H_0}\xi\right)^{-3}$: ——- $s = 5 \cdot 10^{-4}$, $- - - - - s = 1 \cdot 10^{-3}$, $- \cdot - \cdot - \cdot - s = 2 \cdot 10^{-3}$.

Заключение. В работе получено автомодельное решение задачи о расчете скорости течения и температуры, формируемых ветром бризового типа в неоднородной воде. Показано, что при сгоне скорость течения больше, чем при нагоне. Эпюры скорости течения качественно различны: при сгоне скорость течения меняет знак с глубиной один раз, при нагоне - дважды. Профили температуры также различны: при нагоне существует подповерхностный квазиизотермический слой, при сгоне он отсутствует.

Список литературы

[1] Белоусова Э. И. - О роли неравномерности ветра в сгонно-нагонных течениях. - Морские гидрофизические исследования, №3, Севастополь, 1972, с. 10-24.

[2] Саркисян А.С. - Моделирование динамики океана - Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1991

[3] Каменкович В.М. - Основы динамики океана - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1973 с.122-124.

[4] Белоусов В.В., Белоусова Э.И. Влияние неравномерности ветра и рельефа дна на вертикальные движения в прибрежной зоне моря - Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. - Севастополь, 2001 с.35-42.

[5] Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер - Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т1: пер. с англ. - М.: Мир, 1990, с. 292-300.

[6] А. А. Самарский, Е. С. Николаев - Методы решения сеточных уравнений. М: Наука, 1978 с. 97-103.

Э.И.Белоусова, Черноморский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, г.Севастополь, Украина

Белоусов В.В., Морской Гидрофизический Институт Академии Наук Украины г.Севастополь, Украина

ОБ ЭКСПОНЕНТЕ МАТРИЧНОГО ПУЧКА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА, В СЛУЧАЕ КРАТНОГО СПЕКТРА ПРЕДЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

К. И. Чернышов
Воронежская государственная лесотехническая академия,
Воронеж, Россия

Предложен алгоритм диагонализации матричного пучка, зависящего от параметра, в случае, когда предельная матрица имеет кратное собственное значение. В алгоритме используется исчерпывающая суперпозиция специальных преобразований подобия. Получены формулы для экспоненты матричного пучка при различных степенях вырождения структурной матрицы.

Keywords: матричный пучок, собственное значение, малый параметр, преобразование подобия, диагонализация.

§ 1. Введение. Постановка задачи.

Пусть E – конечномерное пространство размерности m, $\mathfrak{N}$ – пространство матриц порядка $m\times m$, действующих в E, и $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Рассмотрим матричный пучок $D(\varepsilon) = D_0 - \sum\limits_{i=1}^{r} \varepsilon^i D_i$ из $\mathfrak{N}$.

В некоторых физических задачах возникают проблемы, связанные с описанием поведения решения задачи Коши (ЗК) для линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{d\widetilde{y}}{d\tau} = D(\varepsilon)\ \widetilde{y}, \qquad \tau \in \mathbb{R}_+, \qquad \widetilde{y}(0,\ \varepsilon) = \widetilde{y}^0 \in E \tag{1.1}$$

при $\tau \to \infty$. После замены $\tau = t\varepsilon^{-p}$ вместо (1.1) получаем ЗК для ЛДУ

$$\varepsilon^p\ \frac{dy}{dt} = D(\varepsilon)\ y, \qquad y(0,\ \varepsilon) = y^0 \in E, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

и теперь проблема состоит в изучении поведения решения ЗК (1.2) при $\varepsilon \to +0$.

Решение задачи (1.2) естественным образом связано с полугруппой на $\mathbb{R}_+$, являющейся в наших условиях матричной экспонентой. Если при этом главная (предельная) матрица D_0 пучка $D(\varepsilon)$ имеет различные собственные значения, то пучок диагонализуем, что позволяет легко получить его экспоненту. Гораздо сложнее исследуется случай, когда матрица D_0 имеет m-кратное собственное значение.

В данной работе предполагается, что предельная матрица D_0 имеет m - кратное собственное λ, т. е. D_0 подобна матрице $J+\lambda I$, где J – жорданова клетка $m\times m$, отвечающая нулевому собственному значению. Здесь будут приведены различные достаточные условия, налагаемые на младшие члены пучка, при которых пучок $D(\varepsilon)$ диагонализуем, что позволит получить формулы для матрицы $\exp(\varepsilon^{-p}D(\varepsilon)t)$. Для упрощения изложения далее будем считать, что $r = 1,\ p = 1$, и построим матрицу $\exp(\varepsilon^{-1}(D_0 - \varepsilon D_1)t)$.

Замечание 1.1. Если матрица $D_0 - \varepsilon D_1$ подобна диагональной матрице $diag\ (\lambda+\mu_1(\varepsilon), ..., \lambda+\mu_m(\varepsilon))$, причем $\mu_i(\varepsilon) \neq \mu_j(\varepsilon),\ i \neq j$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то и матрица $\exp(\varepsilon^{-1}(D_0 - \varepsilon D_1)t)$ подобна диагональной матрице $\exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \times$ $\times\ diag\ (\exp(\varepsilon^{-1}\mu_1 t), ..., \exp(\varepsilon^{-1}\mu_m t))$, где функции $\mu_j(\varepsilon),\ 1 \leqslant j \leqslant m$ зависят от ε регулярно.

Здесь будет предложен алгоритм поиска собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$ пучка $D_0 - \varepsilon D_1$ в виде $\lambda_j(\varepsilon) = \lambda + \mu_j(\varepsilon)$. Один шаг алгоритма будет содержать серию различных преобразований подобия: $\Phi,\ I + \varepsilon\Omega_{-n},\ \Lambda(\varepsilon),\ \Phi^{(1)},\ I + \varepsilon^\nu Y(\varepsilon),\ I + \varepsilon^\nu Z(\varepsilon),\ \nu > 0$, вводимых ниже.

Следует отметить, что количество преобразований, формирующих их исчерпывающую суперпозицию, определяется моментом, когда все возмущения $\mu_j(\varepsilon)$, $1 \leqslant j \leqslant m$ становятся попарно различными, и тогда исследование завершается.

Для краткости будем употреблять следующие обозначения:

$$\mathfrak{S}_I = \Phi, \quad \mathfrak{S}_{II} = \mathfrak{S}_I \ (I + \varepsilon \Omega_{-n}), \quad \mathfrak{S}_{III} = \mathfrak{S}_{II} \Lambda(\varepsilon), \quad \mathfrak{S}_{IV} = \mathfrak{S}_{III} \Phi^{(1)},$$

$$\mathfrak{S}_V = \mathfrak{S}_{IV}(I + \varepsilon^\nu Y(\varepsilon)), \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{VI} = \mathfrak{S}_V(I + \varepsilon^\nu Z(\varepsilon)). \tag{1.3}$$

§ 2. Матрица подобия Φ.

Обозначим через Φ обратимую матрицу, столбцами которой являются собственный вектор φ_1 и присоединенные к нему векторы $\varphi_2, ..., \varphi_m$, отвечающие m - кратному собственному значению λ матрицы D_0 и записанные в ортонормированном базисе $e_1, ..., e_m$, где e_j – вектор, единственным ненулевым элементом которого является единица, стоящая на j - м месте, $1 \leqslant j \leqslant m$. Применение преобразования подобия с матрицей Φ позволяет перенести исследование в пространство E, снабженное ортонормированным базисом $e_1, ..., e_m$.

Поскольку $\Phi^{-1}(D_0 - \lambda I) \ \Phi = J$, то, обозначив $\Phi^{-1} D_1 \ \Phi = \mathfrak{A}$, получим

$$\mathfrak{S}_I^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I) \ \mathfrak{S}_I = \Phi^{-1}((D_0 - \lambda I) - \varepsilon D_1) \ \Phi = J - \varepsilon \mathfrak{A}. \tag{2.1}$$

Следуя [5, 7], назовем матрицу $\mathfrak{A}$ структурной.

§ 3. Структура пространства $\mathfrak{N}$. Однодиагональные матрицы.

3.1. Базис в пространстве $\mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ пространство $End\ E$ вещественных постоянных матриц порядка $m \times m$, действующих в пространстве E.

В m^2-мерном пространстве $\mathfrak{N}$ введем базис с помощью m^2 матриц $V_{i-m}^{r,i-1-r}$, $V_{m-i}^{r,i-1-r}$, у которых единственный ненулевой элемент равен 1 и расположен в $(m - i + r + 1)$ -й строке, $(r+1)$ -м столбце или в $(r+1)$ -й строке, $(m-i+r+1)$ -м столбце соответственно, $0 \leqslant r \leqslant i - 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Единица расположена на линии параллельной диагонали и состоящей из i элементов, причем на этой линии выше единицы находятся r нулей, а ниже $i - 1 - r$ нулей. Именно этим обстоятельством объясняется выбор обозначений для базисных элементов.

В первой группе матриц указанная линия лежит не выше диагонали, во второй – не ниже ее.

Пусть числа r, k, p, q таковы, что

$$0 \leqslant r \leqslant p - 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant q - 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant m, \quad 1 \leqslant q \leqslant m.$$

Возьмем две матрицы из первой группы

$$V_{p-m}^{r,p-1-r}, \quad V_{q-m}^{k,q-1-r}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Произведение матриц* (3.1) *отлично от нуля точно тогда, когда* $r - k = m - q \geqslant 0$, *и при выполнении этого условия произведение равно* $V_{p+q-2m}^{k,p-1-r}$, $p + q \geqslant m + 1$.

Пусть обе матрицы принадлежат второй группе

$$V_{m-p}^{r,p-1-r}, \quad V_{m-q}^{k,q-1-r}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.2. *Произведение матриц* (3.2) *отлично от нуля точно тогда, когда* $k - r = m - p \geqslant 0$, *и при выполнении этого условия произведение равно* $V_{2m-p-q}^{r,q-1-r}$, $p + q \geqslant m + 1$.

Далее вычислим произведение матриц

$$V_{p-m}^{r,p-1-r}, \quad V_{m-q}^{k,q-1-r}, \tag{3.3}$$

принадлежащих соответственно 1 -й и 2 -й группам.

Лемма 3.3. *Произведение матриц* (3.3) *отлично от нуля точно тогда, когда* $r = k \geqslant 0$, *и при выполнении этого условия произведение равно* $V_{-(q-p)}^{m-q+k,p-1-r}$ *при* $p \leqslant q$ *и* $V_{p-q}^{m-p+r,q-1-k}$ *при* $p \geqslant q$.

Наконец, рассмотрим произведение матриц

$$V_{m-p}^{r,p-1-r}, \quad V_{q-m}^{k,q-1-r}, \tag{3.4}$$

принадлежащих соответственно 2 -й и 1 -й группам.

Лемма 3.4. *Произведение матриц* (3.4) *отлично от нуля точно тогда, когда* $r-k=p-q$, *и при выполнении этого условия произведение равно* $V_{-(p-q)}^{k,m-1-r}$ *при* $p \geqslant q,\ r \geqslant k$ *и* $V_{q-p}^{r,m-1-k}$ *при* $p \leqslant q,\ r \leqslant k$.

Справедливость утверждений лемм 3.1 – 3.4 устанавливается непосредственной проверкой. Эти леммы показывают, что при умножении базисных элементов нижний индекс произведения равен сумме нижних индексов сомножителей, т. е. имеет место ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ закон. Этот закон справедлив также и для их коммутатора.

Здесь и далее коммутатор матриц $F,\ G$ равный $FG-GF$ обозначается через $[F,\ G]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Все изложенные в § 3 результаты с очевидными поправками и уточнениями переносятся на случай матриц, зависящих от переменной $t,\ \ t \in [0,\ T]$.

3.2. Однодиагональные матрицы. Обозначим элемент матрицы X из $\mathfrak{N}$, стоящий в r -й строке, l -м столбце, через $x_{r,\ l}$ и представим X в виде суммы ОДНОДИАГОНАЛЬНЫХ матриц $X_i,\ \ 1-m \leqslant i \leqslant m-1$. Элементами X_i являются $x_{r,\ l}$, для которых $l-r=i$. При $1-m \leqslant i \leqslant 0$ это $x_{1-i,\ 1}, ..., x_{m,\ m+i}$, а при $0 \leqslant i \leqslant m-1$ это $x_{1,\ i+1}, ..., x_{m-i,\ m}$. Ненулевые элементы каждой из матриц X_i занимают линию параллельную диагонали с номером, отсчитываемым снизу вверх от $1-m$ до $m-1$. При этом на самой диагонали располагаются элементы $x_{1,1}, ..., x_{m,m}$ матрицы X_0.

С помощью базисных элементов в $\mathfrak{N}$ находим, что

$$X_i = \sum_{r=1}^{m+i} x_{r-i,\ r} V_i^{r-1,\ m+i-r}, \qquad 1-m \leqslant i \leqslant 0, \tag{3.5}$$

$$X_i = \sum_{r=1}^{m-i} x_{r,\ i+r} V_i^{r-1,\ m-i-r}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant m-1. \tag{3.6}$$

Теперь действия с однодиагональными матрицами X_i сводятся к действиям с базисными элементами. Используя логарифмический закон, заключаем, что нижний индекс произведения двух однодиагональных матриц или их коммутатора равен сумме нижних индексов сомножителей, причем суммарный нижний индекс ненулевой матрицы принимает значения от $1-m$ до $m-1$.

Условимся обозначать сумму элементов однодиагональной матрицы X_i через γ_i^X при всех $1-m \leqslant i \leqslant m-1$.

3.3. Прямые разложения пространства $\mathfrak{N}$. Следуя схеме из [4], использующей идеи статьи [3], введем в $\mathfrak{N}$ скалярное произведение

$$(A,\ B) = Tr\ (B'A),$$

где знак "$'$" означает транспонирование. Норму в $\mathfrak{N}$ зададим формулой

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{j,\ r}^2}.$$

Введем в $\mathfrak{N}$ три подпространства $N,\ N',\ M$.

Определение 3.1. Матрица $B \in N'$, если ее ненулевые элементы занимают линии параллельные диагонали с номерами от $1-m$ до 0, причем на каждой линии элементы одинаковы.

Определение 3.2. Матрица $C \in N$, если ее ненулевые элементы занимают линии параллельные диагонали с номерами от 0 до $m-1$, причем на каждой линии элементы одинаковы.

Определение 3.3. Матрица $\Pi \in M$, если ее ненулевые элементы занимают только m -ю строку.

Отметим, что все матрицы из N', N, M содержат m независимых параметров.

Далее введем еще два подпространства F, $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{N}$.

Определение 3.4. Матрица $\Gamma \in F$, если $(\Gamma,\ B) = 0$ для любой матрицы $B \in N'$.

Определение 3.5. Матрица $U \in \mathcal{U}$, если $(U,\ C) = 0$ для любой матрицы $C \in N$.

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 3.5. *Матрица* $\Gamma \in F \iff \gamma_i^{\Gamma} = 0, \quad 1 - m \leqslant i \leqslant 0.$

Лемма 3.6. *Матрица* $U \in \mathcal{U} \iff \gamma_i^{U} = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant m - 1.$

Проверка утверждений лемм 3.5, 3.6 ведется непосредственно с учетом определения скалярного произведения в $\mathfrak{N}$. С помощью тех же лемм проверяется, что

$$\mathfrak{N} = N' \overset{\perp}{\oplus} F, \qquad \mathfrak{N} = N \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{U}, \qquad \mathfrak{N} = M \oplus F.$$

Обозначим через J жорданову клетку $m \times m$, отвечающую нулевому собственному значению, а через J' сопряженную к J матрицу.

Лемма 3.7. *С матрицами* J, J' *коммутируют матрицы из* N, N' *соответственно и только они.*

Замечание 3.1. В [6] фигурируют разложения пространства $\mathfrak{N}$ в прямую сумму подпространств типа $\mathfrak{N} = M \oplus F$, одно из которых (F) характеризует интегрируемую (в определенном смысле) часть некоторого оператора, имеющего на другом подпространстве (M) ограниченную высоту.

§ 4. Уравнения с трансформатором.

4.1. Уравнения $T_{J_1,\ Q}X = Y$, $T_{Q,\ J_1}X = Y$. Пусть даны матрицы $L \in End\ \mathbb{R}^l$, $M \in End\ \mathbb{R}^k$, и пусть имеется матрица $Y \in Hom\ (\mathbb{R}^k,\ \mathbb{R}^l)$.

Введем в пространстве $Hom\ (\mathbb{R}^k,\ \mathbb{R}^l)$ линейные операторы L_l и M_r, порождаемые умножением оператора $X \in Hom\ (\mathbb{R}^k,\ \mathbb{R}^l)$ на оператор L слева и оператор M справа:

$$L_l X = LX, \qquad M_r X = XM, \qquad X \in Hom\ (\mathbb{R}^k,\ \mathbb{R}^l).$$

Следуя [2], назовем оператор $T_{L,\ M} = L_l - M_r$, действующий в $Hom\ (\mathbb{R}^k,\ \mathbb{R}^l)$, трансформатором (Ляпунова). Известно, что условия разрешимости и формула решения уравнения $T_{L,\ M}X = Y$ существенно зависят от взаимного расположения спектров матриц L, M. Если их спектры не пересекаются, то трансформатор $T_{L,\ M}$ обратим, т. е. уравнение

$$LX - XM = Y$$

имеет единственное решение при любом $Y \in Hom\ (\mathbb{R}^k,\ \mathbb{R}^l)$.

Пусть J_1 – жорданова клетка $m_1 \times m_1$, отвечающая нулевому собственному значению, типа J, а $Q = diag\ (q_1, ..., q_n)$ – матрица с ненулевыми попарно различными собственными значениями.

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 4.1. *Уравнение* $T_{J_1,\ Q}X = J_1X - XQ = Y$ *разрешимо для любой матрицы* $Y \in Hom\ (\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^{m_1})$. *Элементы* $x_{r,\ j}$ *матрицы* $X \in Hom\ (\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^{m_1})$ *находятся единственным образом и характеризуются равенствами*

$$x_{r,\ j} = -\sum_{i=r}^{m_1} q_j^{r-1-i} y_{i,\ j}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant m_1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Лемма 4.2. *Уравнение* $T_{Q,\ J_1}X = QX - XJ_1 = Y$ *разрешимо для любой матрицы* $Y \in Hom\ (\mathbb{R}^{m_1},\ \mathbb{R}^n)$. *Элементы* $x_{r,\ j}$ *матрицы* $X \in Hom\ (\mathbb{R}^{m_1},\ \mathbb{R}^n)$ *находятся единственным образом и характеризуются равенствами*

$$x_{j,\ r} = \sum_{i=1}^{r} q_j^{r-1-i} y_{j,\ i}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad 1 \leqslant r \leqslant m_1.$$

4.2. Уравнение с трансформатором K_1. Введем трансформатор $K_1 = T_{J,\ J} = [J,\ .\ ]$, действующий в $\mathfrak{N}$. Из леммы 3.7 вытекает, что $K_1C = 0$ для любой матрицы $C \in N$, следовательно, $Ker\ K_1 = N$.

Далее непосредственным образом проверяется, что $Im\ K_1 \subseteq F$, и, более того,

$$Im\ K_1 = F.$$

Для доказательства последнего равенства возьмем произвольную матрицу $\Gamma \in F$ и построим $U \in \mathcal{U}$ такую, что $K_1U = \Gamma$. Устанавливается, что если $\gamma_i^{\Gamma} = 0$, $1-m \leqslant i \leqslant 0$, то элементы матрицы U с $\gamma_i^U = 0,\quad 0 \leqslant i \leqslant m-1$ находятся единственным образом.

Замечание 4.1. Однодиагональные матрицы при $1 \leqslant i \leqslant m-1$ всегда принадлежат подпространству $Im\ K_1$.

Итак, справедливы прямые разложения

$$\mathfrak{N} = Ker\ K_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{U}, \qquad \mathfrak{N} = N' \overset{\perp}{\oplus} Im\ K_1, \qquad \mathfrak{N} = M \oplus Im\ K_1,$$

причем оба подпространства $N',\ M$ могут претендовать на роль подпространства $Coker\ K_1$. Отметим, что из двух разложений, содержащих $Im\ K_1$, для наших целей предпочтительнее последнее, поскольку в матрицах из M имеется не только наименее возможное число независимых параметров, но и наименьшее число ненулевых элементов. Таким образом, ниже будут использоваться прямые разложения

$$\mathfrak{N} = Ker\ K_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{U}, \qquad \mathfrak{N} = M \oplus Im\ K_1 \qquad (M = Coker\ K_1) \tag{4.1}$$

и соответствующие разбиения единиц

$$I = (I-Q) + Q, \qquad I = (I-P) + P. \tag{4.2}$$

Лемма 4.3. *Уравнение $K_1X = Y$ эквивалентно системе*

$$\begin{cases} (I-P)Y = 0, \\ X = (I-Q)X + \widehat{K}_1^{-1}PY, \end{cases}$$

где $\widehat{K}_1 = K_1 \restriction \mathcal{U}$.

Выясним, как действует проектор $I-P$ из $\mathfrak{N}$ на M. С этой целью возьмем произвольную матрицу Y из $\mathfrak{N}$ и представим ее в виде

$$Y = \Pi + F, \qquad \Pi \in M, \qquad F \in Im\ K_1.$$

Так как $(I-P)Y = \Pi = Y - F$, а элементы F удовлетворяют соотношениям $\gamma_i^F(t) = 0,\quad 1-m \leqslant i \leqslant 0$, то отнимая и добавляя $\gamma_i^Y = 0$ на i - й линии, $1-m \leqslant i \leqslant 0$, приходим к выводу, что $(I-P)Y$ – матрица $m \times m$, ненулевые элементы которой занимают m - ю строку и равны $\gamma_{1-m}^Y,\ \gamma_{2-m}^Y, ..., \gamma_{-1}^Y,\ \gamma_0^Y$.

Теперь можно переформулировать лемму 4.3 следующим образом:

Лемма 4.4. *Уравнение $K_1X = Y$ разрешимо точно тогда, когда $\gamma_i^Y = 0$, $1-m \leqslant i \leqslant 0$. При выполнении этих условий существует единственное решение $\widehat{X}$ из $\mathcal{U}$, обладающее свойством $\gamma_i^{\widehat{X}} = 0,\quad 0 \leqslant i \leqslant m-1$.*

Пример 4.1. Пусть $Y = U_{1-n}^{(0)},\quad 2 \leqslant n \leqslant m-1$, причем $\gamma_{1-n}^{(0)} = 0$, где $\gamma_{1-n}^{(0)}$ – сумма элементов матрицы $U_{1-n}^{(0)}$. Так как условие разрешимости из леммы 4.4 выполнено, то, обозначив элементы матрицы $U_{1-n}^{(0)}$ через $\sigma_{r+n-1,\ r}^{(0)},\quad 1 \leqslant r \leqslant m_1+1$ и заметив, что

$$\sigma_{m,\ m_1+1}^{(0)} = -\sum_{r=1}^{m_1} \sigma_{n-1+r,\ r}^{(0)},$$

найдем решение $\widehat{X}$ из $\mathcal{U}$. Устанавливается, что $\widehat{X} = \Omega_{-n}$, где

$$\Omega_{-n} = \sum_{r=1}^{m_1}(\sum_{l=1}^{r} \sigma^{(0)}_{n-1+l,\ l})V_{-n}^{r-1,\ m_1-r} = \sum_{r=1}^{m_1} \sigma^{(0)}_{n-1+r,\ r}(\sum_{j=r}^{m_1} V_{-n}^{j-1,\ m_1-j}). \tag{4.3}$$

4.3. Уравнение с трансформатором K_0. Введем трансформатор $K_0 = T_{Q,\ Q} = [Q,\ \ .\ ]$, действующий в $End\,\mathbb{R}^n$. Поскольку $Ker\ T_{Q,\ Q}$ – это множество всех диагональных матриц, то уравнение $QX - XQ = Y$ не является разрешимым при любом $Y \in End\,\mathbb{R}^n$. Проверяется, что $Im\ T_{Q,\ Q}$ состоит из всевозможных матриц с нулевой диагональю.

Лемма 4.5. *Уравнение $QX - XQ = Y$ разрешимо точно тогда, когда $y_{ii} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом существует единственная матрица $\widehat{X}$ с нулевой диагональю, элементы $x_{r,\ j}$ которой характеризуются равенствами*

$$x_{r,\ r} = 0, \quad x_{r,\ j} = y_{r,\ j}/(q_r - q_j), \quad r \neq j, \quad 1 \leqslant r \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{4.4}$$

§ 5. Матрица подобия $I + \Omega_{-n}$.

Обозначим через U_i однодиагональные матрицы, дающие в сумме структурную матрицу $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$, и предположим, что матрица U_{1-n} является ГЛАВНОЙ, т. е. $U_{1-m} = ... = U_{-n} = 0$. Покажем, каким образом преобразование подобия с матрицей $I + \varepsilon\ \Omega_{-n}$ позволяет использовать пример 4.1 для избавления от компонента $U^{(0)}_{1-n} \neq 0$ с $\gamma^{(0)}_{1-n} = 0$ в представлении $U_{1-n} = \mathcal{D}_{1-n} + U^{(0)}_{1-n}$, где $\mathcal{D}_{1-n} \in M,\ U^{(0)}_{1-n} \in Im\ K_1$.

С учетом логарифмического закона введем обозначения

$$U_{i,\ 0} = [U_{i+n},\ \Omega_{-n}], \quad 1 - m \leqslant i \leqslant m_1 - 1, \quad U_{i,\ 1} = (-\Omega_{-n})\ U_{i+2n}\ \Omega_{-n}, \quad 1 - m \leqslant i \leqslant -s - 1. \tag{5.1}$$

Обозначим также

$$s = n - m_1 = 2n - m = m - 2m_1 \tag{5.2}$$

и заметим, что числа s, m одновременно четны или нечетны.

Будем считать, что далее всюду выполнено

Предположение 1. Справедливо неравенство $1 \leqslant s \leqslant m$.

Отметим, что предположение 1 влечет неравенства $0 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2$, или $m_1 + 1 \leqslant n \leqslant m$.

Из условия $s \geqslant 1$, записанного в форме $2(1-n) \leqslant 1 - m$, вытекают равенства

$$U_{1-2n,\ 0} = U_{1-n}\Omega_{-n} = 0, \quad \Omega^2_{-n} = 0, \tag{5.3}$$

значит, при достаточно малых ε

$$(I + \varepsilon\Omega_{-n})^{-1} = I - \varepsilon\Omega_{-n}. \tag{5.4}$$

После преобразований с учетом (2.1) получим

$$\mathfrak{S}^{-1}_{II}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_{II} = J - \varepsilon\left(\mathcal{D}_{1-n} + \sum_{i=2-n}^{m-1} U_i\right) - \varepsilon^2 \sum_{i=1-m}^{m_1-1} U_{i,\ 0} - \varepsilon^3 \sum_{i=1-m}^{-s-1} U_{i,\ 1}. \tag{5.5}$$

Замечание 5.1. Если $m_1 = 0$, то $n = m,\ \Omega_{-m} = 0$. Таким образом, $U^{(0)}_{1-m} = 0$, $\mathcal{D}_{1-m} = U_{1-m}$, и преобразование $I + \varepsilon\Omega_{-m}$ превращается в тождественное.

§ 6. Случай общего положения.

Обозначим через $\sigma_{r,\ l}$ элемент из r - й строки, l - го столбца структурной матрицы $\mathfrak{A}$, а через γ_i (без указания $\mathfrak{A}$ в качестве верхнего индекса) сумму элементов однодиагональной матрицы U_i, или ее "след", $1 - m \leqslant i \leqslant m - 1$.

Так называемый СЛУЧАЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ (СОП) будем характеризовать соотношениями

$$\gamma_{1-m} = ... = \gamma_{-n} = 0, \quad \gamma_{1-n} \neq 0, \quad 0 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2. \tag{6.1}$$

Ситуацию, когда $m_1 = 0,\ n = m$, т. е.

$$\gamma_{1-m} = \sigma_{m,1} \neq 0$$

назовем НЕВЫРОЖДЕННЫМ случаем, или случаем I. Ситуацию, когда $m_1 = 1,\ n = m - 1,\ m \geqslant 3$, т. е.

$$\sigma_{1,m} = 0, \quad \gamma_{2-m} = \sigma_{m-1,1} + \sigma_{m,2} \neq 0,$$

назовем случаем СЛАБОГО ВЫРОЖДЕНИЯ, или случаем II. Вместе случаи I, II будем называть КАНОНИЧЕСКИМИ.

В § 5 установлено, что преобразование подобия $I + \varepsilon\Omega_{-n}$ с матрицей Ω_{-n} из (4.3) приводит матрицу $\mathfrak{A}$, у которой однодиагональная матрица $U_i \neq 0$ с наименьшим номером i (наибольшим "весом") имеет нулевой "след" $\gamma_i = 0$, к матрице с $U_i = 0$. Вследствие такой возможности удобно характеризовать СОП несколько более жесткими по сравнению с (6.1) ограничениями

$$U_{1-m} = ... = U_{-n} = 0, \quad \gamma_{1-n} \neq 0, \quad 0 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2. \tag{6.2}$$

Заметим, что для канонических случаев соотношения (6.1) и (6.2) совпадают.

Вместе все СОП при $2 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2$ будем называть случаями СИЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ структурной матрицы $\mathfrak{A}$.

§ 7. Матрица подобия $\Lambda(\varepsilon)$.

Введем матрицу [1]

$$\Lambda(\varepsilon) = diag\ (1, \varepsilon^{\nu}, \varepsilon^{2\nu}, ..., \varepsilon^{(m-1)\nu}), \qquad \nu > 0 \tag{7.1}$$

СРЕЗАНИЯ, дающую возможность отщепить ("срезать") от структурной матрицы $\mathfrak{A}(t)$ однодиагональную матрицу $\mathcal{D}_{1-n}(t)$ с наименьшим индексом и возмутить ею матрицу J так, чтобы у новой главной матрицы имелись различные собственные значения. Такого рода процедура в различных ситуациях использовалась, например, в [8]; в [6] она названа присоединением к J матрицы наибольшего веса, или, короче, ПЕРЕСТРОЙКОЙ.

Матрица $\Lambda(\varepsilon)$ при действии на однодиагональные матрицы X_i обладает замечательным свойством

$$\Lambda^{-1}(\varepsilon) X_i \Lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{i\nu}\ X_i, \qquad 1 - m \leqslant i \leqslant m - 1, \tag{7.2}$$

в частности, $\Lambda^{-1} J \Lambda = \varepsilon^{\nu}\ J$.

Формула (7.2) дает возможность ввести иерархию среди однодиагональных матриц, присваивая им различные "веса" в зависимости от их номеров.

Наряду с $\Lambda(\varepsilon)$ далее используется матрица срезания

$$\bar{\Lambda}_1(\varepsilon) = diag\ (1, \varepsilon^{\bar{\nu}}, \varepsilon^{2\bar{\nu}}, ..., \varepsilon^{(m_1-1)\bar{\nu}}), \qquad \bar{\nu} > 0, \tag{7.3}$$

действующая в подпространстве $End\ PE$, а также матрицы

$$\Lambda_1(\varepsilon) = diag\ (\bar{\Lambda}_1(\varepsilon);\ 0_n), \qquad \Lambda_1^{-1}(\varepsilon) = diag\ (\bar{\Lambda}_1^{-1}(\varepsilon);\ 0_n),$$

действующие в пространстве $End\ E$.

С учетом (5.5), (7.2) получаем

$$\mathfrak{S}_{III}^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_{III} = (\Phi\ (I + \varepsilon\Omega_{-n})\Lambda(\varepsilon))^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \Phi\ (I + \varepsilon\Omega_{-n})\Lambda(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{\nu}\left(J - \varepsilon^{1-n\nu}\ \mathcal{D}_{1-n} - \varepsilon^{1-\nu}\sum_{i=2-n}^{m-1}\varepsilon^{i\nu}U_i - \varepsilon^{2-\nu}\sum_{i=1-m}^{m_1-1}\varepsilon^{i\nu}U_{i,\ 0} - \varepsilon^{3-\nu}\sum_{i=1-m}^{-s-1}\varepsilon^{i\nu}U_{i,\ 1}\right). \tag{7.4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Матрицы Ω_{-n} и $\Lambda(\varepsilon)$ не коммутируют.

§ 8. Матрица подобия $\Phi^{(1)}$.

8.1. Матрица Γ. В правой части равенства (7.3) положим $\nu = 1/n$ и обозначим через Γ матрицу $J - \mathcal{D}_{1-n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Если $m_1 = 0$, то $det\ \Gamma = (-1)^m \sigma_{m,1} \neq 0$. В то же время $det\ \Gamma = 0$ при $1 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2$.

Найдем все собственные значения q_1 матрицы Γ. Проверяется, что уравнение $det\ (\Gamma - q_1 I) = 0$ эквивалентно равенству $q_1^{m_1}(q_1^n + \gamma_{1-n}) = 0,\ m_1 + n = m$. Следовательно,

$$q_{1,\ j} = \sqrt[n]{-\gamma_{1-n}}\exp(2\pi j\sqrt{-1}/n), \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \qquad q_{1,\ j} = 0, \quad n+1 \leqslant j \leqslant m. \tag{8.1}$$

Замечание 8.2. При $m_1 = 0$ и при $m_1 = 1$ все собственные значения матрицы Γ попарно различны. Разница в том, что при $m_1 = 0$ они все ненулевые, а при $m_1 = 1$ среди собственных значений имеется один простой нуль. При $2 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2$ имеется n попарно различных ненулевых собственных значений и одно нулевое m_1 – кратное собственное значение матрицы Γ.

Обозначим

$$H_{i+1-n} = U_{i+1-n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s-1; \qquad H_{i+1-n} = U_{i+1-n} + U_{i+1-2n,\ 0}, \quad s \leqslant i \leqslant s+n-1;$$

$$H_{i+1-n} = U_{i+1-n} + U_{i+1-2n,\ 0} + U_{i+1-3n,\ 1}, \quad s+n \leqslant i \leqslant m+n-2. \tag{8.2}$$

Тогда равенство (7.4) записывается в форме

$$\mathfrak{S}_{III}^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_{III} = \varepsilon^{1/n}\{\Gamma - \sum_{i=1}^{m+n-2} \varepsilon^{i/n} H_{i+1-n}\}. \tag{8.3}$$

8.2. Матрица Вандермонда и ее обобщение. Введем в рассмотрение обратимую матрицу $\Phi^{(1)}$, играющую роль преобразования подобия, с помощью которой удается записать в ортонормированном базисе $\{e_j\}_1^m$ главную матрицу Γ матричного пучка из правой части равенства (8.3), полученного после перестройки.

Предположим, что $q_j^n = -\gamma \neq 0$ при всех $1 \leqslant j \leqslant n$, и введем в рассмотрение n – мерные вектор-строки $\chi_{i,\ n} = (q_1^i, ..., q_n^i)$ и вектор-столбцы $\theta_{i,n} = col\ (q_1^i, ..., q_n^i),\ i \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. Составим матрицу Вандермонда $\mathcal{V}$ порядка $n \times n$, $n \geqslant 2$, строками которой служат $\chi_{i,\ n},\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$. Проверяется, что столбцами обратной матрицы $\mathcal{V}^{-1}$ являются векторы $(1/n)\ \theta_{-i,\ n},\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Далее рассмотрим матрицу $\Phi^{(1)}$ порядка $m \times m,\ m \geqslant n$, столбцами которой служат орты $e_1, ..., e_{m_1}$, а также векторы $\omega_1, ..., \omega_n$, где $\omega_j = col\ (1, q_j, ...q_j^{m-1}),\ 1 \leqslant j \leqslant n$. Последние n векторов образуют блок размеров $m \times n$, строками которого служат $\chi_{i,\ n}$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$. При $n = m,\ m_1 = 0$ получаем $\Phi^{(1)} = \mathcal{V}$, поэтому $\Phi^{(1)}$ – обобщение матрицы Вандермонда. Разложением по элементам первых m_1 столбцов устанавливается, что $det\ \Phi^{(1)} = (\prod_{j=1}^{n} q_j^{m_1})\ det\ \mathcal{V} \neq 0$. Поскольку $0 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2$, то

$$(\Phi^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0_{m_1 \times s} & (1/\gamma)\ I_{m_1} \\ & & \\ 0_{n \times m_1} & & (\Phi^{(1)})_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (\Phi^{(1)})_{22}^{-1} = (1/n)(\theta_{-m_1,\ n}, ..., \theta_{1-m,\ n}), \tag{8.4}$$

т. е. $(\Phi^{(1)})_{22}^{-1}$ – матрица порядка $n \times n$ вида

$$(\Phi^{(1)})_{22}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} q_{1,\ 1}^{-m_1} & \dots & q_{1,\ 1}^{1-m} \\ & & \\ q_{1,\ 2}^{-m_1} & \dots & q_{1,\ 2}^{1-m} \\ & & \\ \dots & \dots & \dots \\ & & \\ q_{1,\ n}^{-m_1} & \dots & q_{1,\ n}^{1-m} \end{pmatrix}.$$

8.3. Матрица $\Gamma^{(1)}$. Обозначим $\Gamma^{(1)}=(\Phi^{(1)})^{-1}\Gamma\Phi^{(1)}$, $H^{(i+1-n)}=(\Phi^{(1)})^{-1}H_{i+1-n}\Phi^{(1)}$. Тогда вместо (8.3) получаем равенство

$$\mathfrak{S}_{IY}^{-1}(D(\varepsilon)-\lambda I)\ \mathfrak{S}_{IY}=\varepsilon^{1/n}\{\Gamma^{(1)}-\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H^{(i+1-n)}\}. \tag{8.5}$$

Ввиду блочной структуры матрицы $\Phi^{(1)}$ удобно в таком же виде представить все матрицы из правой части равенства (8.5). С этой целью введем проекторы

$$P=diag\ (I_{m_1};\ 0_n),\qquad I-P=diag\ (0_{m_1};\ I_n) \tag{8.6}$$

на подпространства $End\ PE,\ End\ (I-P)E$ соответственно и станем обозначать блоки любой матрицы A таким образом:

$$A_{11}=PAP,\quad A_{12}=PA(I-P),\quad A_{21}=(I-P)AP,\quad A_{22}=(I-P)A(I-P). \tag{8.7}$$

Устанавливается, что при $2\leqslant m_1\leqslant(m-1)/2$ имеем $\Gamma^{(1)}=diag\ (J_1;\ Q)$, $\Gamma_{12}^{(1)}=\Gamma_{21}^{(1)}=0$, $\Gamma_{11}^{(1)}=J_1$ – матрица порядка $m_1\times m_1$ типа J, а $\Gamma_{22}^{(1)}=Q=diag\ (q_{1,\ 1},...,q_{1,\ n})$. В силу (8.1) главная матрица Q блока обратима. Если $m_1=1,\ n=m-1$, то $\Gamma^{(1)}=diag\ (0;\ Q)$. Это означает, что $\Gamma_{12}^{(1)}=\Gamma_{21}^{(1)}=0,\ \Gamma_{11}^{(1)}=0$ – скаляр, $\Gamma_{22}^{(1)}=Q=diag\ (q_{1,\ 1},...,q_{1,\ m-1})$ – обратимая матрица. Наконец, если $m_1=0,\ n=m$, то $\Gamma^{(1)}=Q=diag\ (q_{1,\ 1},...,q_{1,\ m})$ – обратимая матрица.

Замечание 8.3. В дальнейшем нам потребуются представления блочных матриц $H_{k\ l}^{(i+1-n)},\ -m_1\leqslant i\leqslant m+n-2,\ k,\ l=1,\ 2$. В [9, 10] приведены соответствующие формулы для всех элементов этих матриц.

§ 9. Матрицы подобия $I+\varepsilon^{\nu}Y(\varepsilon),\ \ I+\varepsilon^{\nu}Z(\varepsilon)$.

Матрицы $H^{(i+1-n)},\ 1\leqslant i\leqslant m+n-2$ из правой части равенства (8.5) не являются диагональными, поэтому представим их согласно (8.7) в виде блочных матриц. Вместо правой части (8.5) попытаемся получить блочно-диагональную матрицу. При $m_1=0$ придем к одному блоку $diag\ (\varepsilon^{1/m}\mathfrak{G}(\varepsilon))$, при $2\leqslant m_1\leqslant(m-1)/2$ получим $diag\ (\varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_1(\varepsilon);\ \varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_2(\varepsilon))$, где $\mathfrak{G}_1(\varepsilon)=J_1-\varepsilon^{1/n}H_{11}^{(2-n)}-\varepsilon^{2/n}...$, $\mathfrak{G}_2(\varepsilon)=Q-\varepsilon^{1/n}H_{22}^{(2-n)}-$
$-\varepsilon^{2/n}...$. Это позволит расщепить пучок на два независимых пучка в подпространствах $End\ PE,\ End\ (I-P)E$ соответственно. Отметим, что при $m_1=1,\ n=m-1$ правая часть равенства $\varepsilon^{1/(m-1)}\mathfrak{G}_1(\varepsilon)=-\varepsilon^{1/(m-1)}H_{11}^{(3-m)}-\varepsilon^{2/(m-1)}...$ является скалярной функцией.

9.1. Блочная диагонализация. Сплетающие матрицы. В случае, когда $1\leqslant m_1\leqslant(m-1)/2$, введем в рассмотрение преобразование подобия $I+\varepsilon^{1/n}Y(\varepsilon)$ со сплетающей матрицей $Y(\varepsilon)=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y^{(i)}$, у которой $Y_{11}^{(i)}=Y_{22}^{(i)}=0$. Строками матрицы $Y_{12}^{(i)}$ порядка $m_1\times n$ являются n - мерные вектор-строки $b_{i,\ 1}\chi_{i+1,\ n},\ b_{i,\ 2}\chi_{i+2,\ n},\ ...,$
$b_{i,\ m_1}\chi_{i+m_1,\ n}$. Столбцами матрицы $Y_{21}^{(i)}$ порядка $n\times m_1$ являются n - мерные вектор-столбцы $a_{i,\ 1}\theta_{i+1,\ n},\ a_{i,\ 2}\theta_{i,\ n},...,a_{i,\ m_1}\theta_{i+2-m_1,\ n}$, т. е.

$$Y_{12}^{(i)}=\begin{pmatrix} b_{i,\ 1}q_{1,\ 1}^{i+1} & \dots & b_{i,\ 1}q_{1,\ n}^{i+1}\\ b_{i,\ 2}q_{1,\ 2}^{i+2} & \dots & b_{i,\ 2}q_{1,\ n}^{i+2}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{i,\ m_1}q_{1,\ 1}^{i+m_1} & \dots & b_{i,\ m_1}q_{1,\ n}^{i+m_1}\end{pmatrix},\qquad Y_{21}^{(i)}=\begin{pmatrix} a_{i,\ 1}q_{1,\ 1}^{i+1} & \dots & a_{i,\ m_1}q_{1,\ 1}^{i+2-m_1}\\ a_{i,\ 1}q_{1,\ 2}^{i+1} & \dots & a_{i,\ m_1}q_{1,\ 2}^{i+2-m_1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i,\ 1}q_{1,\ n}^{i+1} & \dots & a_{i,\ m_1}q_{1,\ n}^{i+2-m_1}\end{pmatrix}.$$

При $m_1=1$ имеем $Y_{12}^{(i)}=b_{i,\ 1}\ (q_{1,\ 1}^{i+1},\dots,q_{1,\ m-1}^{i+1}),\quad Y_{21}^{(i)}=a_{i,\ 1}\ col\ (q_{1,\ 1}^{i+1},\dots,q_{1,\ m-1}^{i+1})$. При $m_1=0$ полагаем $Y(\varepsilon)\equiv 0$, и тогда соответствующее преобразование подобия превращается в тождественное.

Здесь $a_{i,\ r},\ b_{i,\ r},\ 1\leqslant r\leqslant m_1,\ i\geqslant 0$ – некоторые постоянные, поиск которых проводился в [9]. Здесь кратко изложим схему алгоритма.

Вначале отметим, что равенство

$$\mathfrak{S}_V^{-1}(D(\varepsilon)-\lambda I)\ \mathfrak{S}_V=\varepsilon^{1/n}\ diag\ (\mathfrak{G}_1(\varepsilon);\ \mathfrak{G}_2(\varepsilon)) \tag{9.1}$$

можно переписать в форме

$$D(\varepsilon)=\lambda I+\varepsilon^{1/n}\mathfrak{S}_V\ diag\ (\mathfrak{G}_1(\varepsilon);\ \mathfrak{G}_2(\varepsilon))\ \mathfrak{S}_V^{-1},$$

следовательно,

$$(t/\varepsilon)\ D(\varepsilon)=(t/\varepsilon)\ \lambda I+(t/\varepsilon)\ \mathfrak{S}_V\ diag\left(\varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_1(\varepsilon);\ \varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_2(\varepsilon)\right)\ \mathfrak{S}_V^{-1}. \tag{9.2}$$

Чтобы найти неизвестные матрицы $Y_{12}(\varepsilon),\ Y_{21}(\varepsilon)$, запишем требуемое равенство (9.1), или подробнее

$$\{diag\ (J_1;\ Q)-\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H^{(i+1-n)}\}\ (I+\varepsilon^{1/n}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y^{(i)})=$$

$$=(I+\varepsilon^{1/n}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y^{(i)})\ diag\ (\mathfrak{G}_1(\varepsilon);\ \mathfrak{G}_2(\varepsilon)) \tag{9.3}$$

в блочном виде. В результате придем к четырем уравнениям

$$\mathfrak{G}_1(\varepsilon)=J_1-\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H_{11}^{(i+1-n)}-\varepsilon^{1/n}(\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H_{12}^{(i+1-n)})\ (\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y_{21}^{(i)}),$$

$$\mathfrak{G}_2(\varepsilon)=Q-\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H_{22}^{(i+1-n)}-\varepsilon^{1/n}(\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H_{21}^{(i+1-n)})\ (\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y_{12}^{(i)}),$$

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y_{21}^{(i)})\ \mathfrak{G}_1(\varepsilon)=-\sum_{i=0}^{m+n-3}\varepsilon^{i/n}H_{21}^{(i+2-n)}+(Q-\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H_{22}^{(i+1-n)})\ (\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y_{21}^{(i)}),$$

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y_{12}^{(i)})\ \mathfrak{G}_2(\varepsilon)=-\sum_{i=0}^{m+n-3}\varepsilon^{i/n}H_{12}^{(i+2-n)}+(J_1-\sum_{i=1}^{m+n-2}\varepsilon^{i/n}H_{11}^{(i+1-n)})\ (\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/n}Y_{12}^{(i)})$$

для блоков. Первые два уравнения при $2\leqslant m_1\leqslant(m-1)/2$ представимы в форме

$$\mathfrak{G}_1(\varepsilon)=J_1-\varepsilon^{1/n}H_{11}^{(2-n)}-\varepsilon^{2/n}(H_{11}^{(3-n)}+H_{12}^{(2-n)}Y_{21}^{(0)})-\varepsilon^{3/n}\dots, \tag{9.4}$$

$$\mathfrak{G}_2(\varepsilon)=Q-\varepsilon^{1/n}H_{22}^{(2-n)}-\varepsilon^{2/n}(H_{22}^{(3-n)}+H_{21}^{(2-n)}Y_{12}^{(0)})-\varepsilon^{3/n}\dots. \tag{9.5}$$

Напомним, что при $m_1=1$ равенство (9.4) состоит из скалярных функций и принимает вид

$$\varepsilon^{1/(m-1)}\mathfrak{G}_1(\varepsilon)=-\varepsilon^{2/(m-1)}H_{11}^{(3-m)}-\varepsilon^{3/(m-1)}(H_{11}^{(4-m)}+H_{12}^{(3-m)}Y_{21}^{(0)})-\varepsilon^{4/(m-1)}\dots. \tag{9.6}$$

Для нахождения коэффициентов разложений блоков $Y_{12}(\varepsilon),\ Y_{21}(\varepsilon)$ обратимся к 3-му и 4-му уравнениям относительно $Y_{21},\ Y_{12}$ соответственно и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате придем к итерационным процедурам

$$QY_{21}^{(0)}-Y_{21}^{(0)}J_1=H_{21}^{(2-n)},\quad QY_{21}^{(1)}-Y_{21}^{(1)}J_1=H_{21}^{(3-n)}+H_{22}^{(2-n)}Y_{21}^{(0)}-Y_{21}^{(0)}H_{11}^{(2-n)},\dots \tag{9.7}$$

$$J_1Y_{12}^{(0)}-Y_{12}^{(0)}Q=H_{12}^{(2-n)},\quad J_1Y_{12}^{(1)}-Y_{12}^{(1)}Q=H_{12}^{(3-n)}+H_{11}^{(2-n)}Y_{12}^{(0)}-Y_{12}^{(0)}H_{22}^{(2-n)},\dots, \tag{9.8}$$

из которых с помощью лемм 4.3, 4.4 отыскиваются все коэффициенты разложений по степеням малого параметра ε матричных функций $Y_{21}(\varepsilon),\ Y_{12}(\varepsilon)$ соответственно.

9.2. Диагонализация пучка. Матрицы с нулевой диагональю. Случай I. Условимся обозначать через $A_0 = diag\ (a_{11}, ..., a_{mm})$ матрицу, составленную из диагональных элементов любой матрицы $A = (a_{k\ l}),\ k, l = 1, 2, ...m$, и через A_* матрицу $A - A_0$ с нулевой диагональю.

Пусть $m_1 = 0$. Тогда равенство (8.5) с учетом соотношения $Y(\varepsilon) \equiv 0$ принимает вид

$$\mathfrak{S}_V^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_V = \varepsilon^{1/m}\left(Q - \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon^{i/m} H^{(i+1-m)}\right), \tag{9.9}$$

где $\mathfrak{S}_V = \Phi\Lambda(\varepsilon)\mathcal{V}$.

Введем преобразование подобия $I + \varepsilon^{1/m} Z(\varepsilon)$, где $Z(\varepsilon) = Z_*(\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/m} Z_*^{(i+1)}$. Кроме того, введем диагональные матрицы $\mathcal{H}^{(i)} = \mathcal{H}_0^{(i)},\ i = 1, 2, ...$. Покажем, что с помощью матрицы $I + \varepsilon^{1/m} Z_*(\varepsilon)$ удается перейти от (9.9) к уравнению, в правой части которого находится диагональная матрица. С этой целью рассмотрим уравнение

$$(Q - \sum_{i=1}^{2(m-1)} \varepsilon^{i/m} H^{(i+1-m)})(I + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/m} Z_*^{(i)}) = (I + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/m} Z_*^{(i)})(Q - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/m} \mathcal{H}_0^{(i)}) \tag{9.10}$$

относительно матриц $Z_*^{(i)}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{i/m},\ i = 1, 2, ...$, придем к итерационной процедуре

$$[Q, Z_*^{(1)}] = H^{(2-m)} - \mathcal{H}_0^{(1)}, \qquad [Q, Z_*^{(2)}] = T_{H^{(2-m)},\ F_0^{(1)}} Z_*^{(1)} + H^{(3-m)} - \mathcal{H}_0^{(2)}, ... \tag{9.11}$$

Так как $H^{(2-m)} = (h_{k\ l}^{(2-m)})$, где $h_{k\ l}^{(2-m)} = \dfrac{1}{m} q_{1k}^{2-m}(\sigma_{m-1\ 1} + \dfrac{q_{1l}}{q_{1k}}\sigma_{m\ 2}),\ k, l = 1, 2, ..., m$, то с учетом леммы 4.5 найдем $\mathcal{H}^{(1)}$ из условий разрешимости первого уравнения в (9.11):

$$\mathcal{H}_0^{(1)} = \frac{\gamma_{2-m}}{m}\ (Q^{-1})^{m-2}. \tag{9.12}$$

В то же время по формуле (4.4) отыщем все элементы $z_{k\ l}^{(1)}$ матрицы $Z_*^{(1)}$:

$$z_{k\ l}^{(1)} = \frac{1}{m\ q_{1k}^{m-2}\ (q_{1k} - q_{1l})}(\sigma_{m-1\ 1} + \frac{q_{1l}}{q_{1k}}\sigma_{m\ 2}), \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, ..., m. \tag{9.13}$$

Точно так же $\mathcal{H}_0^{(2)}$ находится из условий разрешимости второго уравнения в (9.11) и его решение $Z_*^{(2)}$ записывается согласно формуле (4.4). Продолжая аналогичные рассуждения, можем найти любое число диагональных матриц $\mathcal{H}_0^{(i)},\ i = 1, 2, ...$.

Напомним, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{VI} = \Phi\Lambda(\varepsilon)\mathcal{V}(I + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/m} Z_*^{(i)})$ в случае I. Таким образом, равенство (9.9) с учетом (9.10) превращается в требуемое равенство

$$\mathfrak{S}^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S} = \varepsilon^{1/m}\left(Q - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/m} \mathcal{H}_0^{(i)}\right). \tag{9.14}$$

Отсюда находим, что

$$\frac{t}{\varepsilon} D(\varepsilon) = \frac{t}{\varepsilon}\lambda I + t\ \varepsilon^{(1-m)/m}\ \mathfrak{S}\left(Q - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/m} \mathcal{H}_0^{(i)}\right)\mathfrak{S}^{-1},$$

и значит, при $m_1 = 0$ имеем

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon)\ t) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \mathfrak{S}\ diag\ \ (\exp(t\mu_1(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_m(\varepsilon)))\ \mathfrak{S}^{-1}, \tag{9.15}$$

где $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-m)/m})$ и

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{(1-m)/m} \left(q_{1,\ j} + \varepsilon^{1/m} \frac{\gamma_{2-m}}{m\ q_{1,\ j}^{m-2}} + \varepsilon^{2/m} ... \right), \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

9.3. Случай II. Пусть $m_1 = 1$. Тогда вместо J_1 следует принять 0 в (9.7), (9.8). В [9] было установлено, что

$$H_{11}^{(i)} = 0, \quad i \geqslant 3 - m, \quad i \neq k(m-1), \quad k = 0, 1, 2, ... ,$$

$$H_{12}^{(r)} Y_{21}^{(i)} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r + i + 1 = k(m-1), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Это означает, что при $m_1 = 1$ имеем скалярное равенство

$$\varepsilon^{1/(m-1)} \mathfrak{G}_1(\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left(H_{11}^{(k(m-1))} + \sum_{l=0}^{(k+1)(m-1)-3} H_{12}^{(k(m-1)-1-l)} Y_{21}^{(l)} \right). \tag{9.16}$$

Кратко (9.16) записывается как $\varepsilon^{1/(m-1)} \mathfrak{G}_1(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} g_k$. В [9] показано, что

$$g_0 = -\frac{1}{\gamma_{2-m}} \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{k,\ 1}\ \sigma_{m,\ k+1}.$$

Наряду с этим имеем равенство

$$\varepsilon^{1/(m-1)}\ \mathfrak{G}_2(\varepsilon) = \varepsilon^{1/(m-1)} \left(Q - \sum_{i=1}^{2m-3} \varepsilon^{i/(m-1)} H^{(i+2-m)} \right) \tag{9.17}$$

типа (9.9). Действуя далее по схеме п. 9.2, находим, что при $m_1 = 1$

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon)\ t) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \mathfrak{S}\ diag\ (\exp(t\mu_m(\varepsilon)); \exp(t\mu_1(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_{m-1}(\varepsilon)))\ \mathfrak{S}^{-1}, \tag{9.18}$$

где $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{-1})$, $\mu_m(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 ...$,

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{(2-m)/(m-1)} \left(q_{1,\ j} + \varepsilon^{1/(m-1)} \frac{\gamma_{3-m}}{(m-1)\ q_{1,\ j}^{m-3}} + \varepsilon^{2/(m-1)} ... \right), \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1$$

(сравни с (9.15)).

Замечание 9.2. Если $\sigma_{1,m-1} = 0$, то $\Omega_{1-m} = 0$, и преобразование $I + \varepsilon\Omega_{1-m}$ превращается в тождественное.

§ 10. Некоторые частные случаи.

10.1. Случай I при $m = 2$. Пусть $\gamma_{-1} = \sigma_{21} \neq 0$. Тогда $\nu = 1/2$, $q_{11}/q_{12} = -1$,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \sigma_{11} - \sigma_{22} \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad H^{(1)} = \frac{\sigma_{12}}{2} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{11} & q_{12} \end{pmatrix},$$

где $\gamma_0 = Tr\ \mathfrak{A} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$. Кроме того,

$$F_0^{(1)} = \frac{1}{2}\ \gamma_0\ I, \qquad Z_*^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & z_{12}^{(1)} \\ z_{21}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad z_{k\ l}^{(1)} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\ (q_{1k} - q_{1l})}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon)\ t) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \mathfrak{S}\ diag\ (\exp(t\mu_1(\varepsilon)), \exp(t\mu_2(\varepsilon)))\ \mathfrak{S}^{-1}, \tag{10.1}$$

где $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{-1/2})$ и

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} \left(q_{1,\ j} + \varepsilon^{1/2} \frac{\gamma_0}{2} + \varepsilon ... \right), \quad j = 1, 2.$$

10.2. Случай I при $m = 3$. Пусть $\gamma_{-2} = \sigma_{31} \neq 0$. Тогда $\nu = 1/3$,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $H^{(-1)} = (h^{(-1)}_{k\ l})$, где $h^{(-1)}_{k\ l} = \frac{1}{3} q^{-1}_{1k}(\sigma_{21} + \frac{q_{1l}}{q_{1k}} \sigma_{32})$, $k, l = 1, 2, 3$, в частности, $h^{(-1)}_{k\ k} = \frac{1}{3} q^{-1}_{1k} \gamma_{-1}$. Кроме того, $H^{(0)} = (h^{(0)}_{k\ l})$, где $h^{(0)}_{k\ l} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \frac{q_{1l}}{q_{1k}}\sigma_{22} + (\frac{q_{1l}}{q_{1k}})^2 \sigma_{33}\right)$, $k, l = 1, 2, 3$, в частности, $h^{(0)}_{k\ k} = \frac{1}{3}\gamma_0$. Далее, $H^{(1)} = (h^{(1)}_{k\ l})$, где $h^{(1)}_{k\ l} = \frac{1}{3} q_{1\ l}(\sigma_{12} + \frac{q_{1l}}{q_{1k}}\sigma_{23})$, $k, l = 1, 2, 3$, в частности, $h^{(1)}_{k\ k} = \frac{1}{3}\ q_{1\ k}\ \gamma_1$, и наконец, $H^{(2)} = (h^{(1)}_{k\ l})$, где $h^{(1)}_{k\ l} = \frac{\sigma_{13}}{3} q^2_{1\ l}$, $k, l = 1, 2, 3$, в частности, $h^{(2)}_{k\ k} = \frac{\sigma_{13}}{3}\ q^2_{1\ k}$.

Согласно (9.12), (9.13) находим, что

$$F^{(1)}_0 = \frac{\gamma_{-1}}{3}\ Q^{-1},$$

и элементы $z^{(1)}_{k\ l}$ матрицы $Z^{(1)}_*$ имеют вид

$$z^{(1)}_{k\ l} = \frac{1}{3\ q_{1k}\ (q_{1k} - q_{1l})}(\sigma_{21} + \frac{q_{1l}}{q_{1k}}\sigma_{32}), \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon)\ t) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \mathfrak{S}\ diag\ \ (\exp(t\mu_1(\varepsilon)), \exp(t\mu_2(\varepsilon)), \exp(t\mu_3(\varepsilon)))\, \mathfrak{S}^{-1}, \tag{10.2}$$

где $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{-2/3})$ и

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{-2/3}\left(q_{1,\ j} + \varepsilon^{1/3}\frac{\gamma_{-1}}{3q_{1j}} + \varepsilon^{2/3}...\right), \quad j = 1, 2, 3.$$

10.3. Случай II при $m = 3$. Пусть $\sigma_{31} = 0$, $\gamma_{-1} = \sigma_{21} + \sigma_{32} \neq 0$. Тогда $\nu = 1/2$,

$$H_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \sigma_{21}\ (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & q_{11} & q_{12} \\ 0 & q^2_{11} & q^2_{12} \end{pmatrix}, \quad (\Phi^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/\gamma_{-1} \\ 0 & 1/2q_{11} & 1/2q^2_{11} \\ 0 & 1/2q_{12} & 1/2q^2_{12} \end{pmatrix},$$

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{11} - \sigma_{33} & \sigma_{11} - \sigma_{33} \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) & \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) & \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{pmatrix} + \frac{\sigma_{21}(\sigma_{33} - \sigma_{11})}{\gamma_{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

В скалярном равенстве

$$\varepsilon^{1/2}\mathfrak{G}_1(\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1}\left(H^{(2k)}_{11} + \sum_{l=0}^{2k-1} H^{(2k-1-l)}_{12} Y^{(l)}_{21}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} g_k$$

имеем

$$g_0 = -H^{(0)}_{11} = -\frac{1}{\gamma_{-1}}(\sigma_{11}\sigma_{32} + \sigma_{21}\sigma_{33}), \quad g_1 = -H^{(2)}_{11} - H^{(1)}_{12} Y^{(0)}_{21} - H^{(0)}_{12} Y^{(1)}_{21}, \ldots .$$

Таким образом,

$$\exp(\varepsilon^{-1} D(\varepsilon)\ t) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \mathfrak{S}\ diag\ \ (\exp(t\mu_3(\varepsilon)); \exp(t\mu_1(\varepsilon)), \exp(t\mu_2(\varepsilon)))\, \mathfrak{S}^{-1}, \tag{10.3}$$

где $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{-1})$, $\mu_3(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 \ldots$,

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2}\left(q_{1,\ j} + \varepsilon^{1/2}\frac{\gamma_0}{2} + \varepsilon\ldots\right), \quad j = 1, 2.$$

Замечание 10.1. Если $\sigma_{12} = 0$, то $\gamma_{-1} = \sigma_{32}$, $\Omega_{-2} = 0$ и $g_0 = -\dfrac{1}{\gamma_{-1}}\ \sigma_{11}\sigma_{32} = -\sigma_{11}$.

§ 11. Случай сильного вырождения.

11.1. Переход к системе независимых уравнений. Пусть теперь $2 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2$. Запишем полученное в $End\ PE$ равенство (9.4) в виде

$$\varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_1(\varepsilon) = \varepsilon^{1/n}\left(J_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/n} F^{(i+1-n)}\right), \tag{11.1}$$

где

$$F^{(2-n)} = H_{11}^{(2-n)}, \qquad F^{(i+1-n)} = H_{11}^{(i+1-n)} + \sum_{l=0}^{i-2} H_{12}^{(i-n-l)} Y_{21}^{(l)}, \quad i \geqslant 2,$$

и обозначим через $\gamma_{i+1-n,\ 1}$ сумму элементов матрицы $F^{(i+1-n)}$. Если при этом матрица $F^{(i+1-n)}$ является двухдиагональной, то условимся, что $\gamma_{i+1-n,\ 1}$ – это сумма элементов матрицы с меньшим номером (большим весом).

Представим (9.1) в виде эквивалентной системы

$$P\mathfrak{S}_V^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_V P = \varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_1(\varepsilon); \quad (I-P)\mathfrak{S}_V^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_V(I-P) = \varepsilon^{1/n}\mathfrak{G}_2(\varepsilon) \tag{11.2}$$

в подпространствах $End\ PE, End\ (I-P)E$ соответственно.

Второе равенство в (11.2), по существу, ничем не отличается от разобранного в п. 9.2 случая I. Так как

$$(I-P)\mathfrak{S}_V^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}_V(I-P) = \varepsilon^{1/n}\left(Q - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/n} G^{(i+1-n)}\right), \tag{11.3}$$

где использованы обозначения

$$G^{(2-n)} = H_{22}^{(2-n)}, \qquad G^{(i+1-n)} = H_{22}^{(i+1-n)} + \sum_{l=0}^{i-2} H_{21}^{(i-n-l)} Y_{12}^{(l)}, \quad i \geqslant 2,$$

и матрица Q обратима, то обратимой является матрица $(I-P)\mathfrak{S}^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}\ (I-P)$. Следовательно,

$$(I-P)\mathfrak{S}^{-1}\exp(\varepsilon^{-1}D(\varepsilon)t)\mathfrak{S}(I-P) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ diag\ \left(0_{m_1}; \exp(t\mu_1(\varepsilon)), \ldots, \exp(t\mu_n(\varepsilon))\right), \tag{11.4}$$

где $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-m)/n})$ и

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{(1-n)/n}\left(q_{1,\ j} + \varepsilon^{1/n}\frac{\gamma_{2-n}}{n\ q_{1,\ j}^{n-2}} + \varepsilon^{2/n}\ldots\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Что касается первого равенства системы (11.2), то оно требует дальнейшего исследования. Равенство

$$P\mathfrak{S}^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}\ P = \varepsilon^{1/n}\left(J_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/n} F^{(i+1-n)}\right), \tag{11.5}$$

в котором $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_V$, т. е. $Z(\varepsilon) \equiv 0$, напоминает по форме (2.1). Разница в том, что оно, во-первых, рассматривается не в $End\ E$, а в подпространстве $End\ PE$, и, во-вторых, содержит множитель $\varepsilon^{1/n}$, меняющий ранг малого параметра с -1 на $-1 + 1/n = (1-n)/n$. Кроме того, правая часть в (11.5) разложена не по целым степеням ε, а по степеням $\varepsilon^{1/n}$.

Исследование заканчивается, когда в подпространстве $End\ PE$ возникают канонические случаи I или II. Если же в подпространстве $End\ PE$ имеет место случай сильного вырождения, то после первой редукции задачи следует повторить аналогичные рассуждения.

Введем в рассмотрение преобразование подобия вида

$$P\mathfrak{S}_1 P = P\mathfrak{S}_{VI,\ 1}P = (I + \varepsilon^{(s+1)\nu}\Omega_{-n_1,\ 1})\bar{\Lambda}_1(\varepsilon)\Phi^{(2)}(I + \varepsilon^{\nu_1}Y_1(\varepsilon))(I + \varepsilon^{\nu_1}Z_1(\varepsilon)), \qquad (11.6)$$

действующее в $End\ PE$. Здесь $m_2 = m_1 - n_1,\ 0 \leqslant m_2 \leqslant (m_1-1)/2,\ \bar{\Lambda}_1(\varepsilon),\ \bar{\nu} > 0$ определяется в (7.3), $\nu_1 = \nu + \bar{\nu}$, матрицы $\Omega_{-n_1,\ 1}$ (однодиагональная), $\Phi^{(2)}$, $Y_1(\varepsilon)$ (сплетающая), $Z_1(\varepsilon)$ (с нулевой диагональю) аналогичны описанным выше, и заметим, что в случае I первая и предпоследняя матрицы в правой части равенства (11.6) являются тождественными.

11.2. Случай I в $End\ PE$. Пусть $m_2 = 0,\ n_1 = m_1$. Вначале отметим, что матрицы $F^{(i+1-n)}$ порядка $m_1 \times m_1$ ведут свое происхождение от матриц H_{i+1-n}, имеющих от одной до трех ненулевых линий параллельных диагонали (см. (5.1), (8.2)). Номера линий однодиагональных (или двухдиагональных, когда $1 \leqslant s \leqslant m_1 - 2$) матриц $F^{(i+1-n)}$, действующих в $End\ PE$, при всех $i \geqslant 1$ могут изменяться от $1 - m_1$ до $m_1 - 1$. В [9] показано, что ненулевые элементы однодиагональных матриц $F^{(2-n)}, ..., F^{(-m_1)}$ располагаются на линиях с НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ номерами. Матрица $F^{(1-m_1)}$ содержит один ненулевой элемент, стоящий в m_1 - й строке и 1 - м столбце, и является первой однодиагональной матрицей с ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ номером, причем наименьшим.

Замечание 11.1. Такой же номер имеют матрицы $F^{(s+1)}$ и $F^{(s+n+1)}$ (последнее возможно только при $1 \leqslant s \leqslant m_1 - 2$).

Предположим, что

$$\gamma_{1-m_1,\ 1} \neq 0. \qquad (11.7)$$

В [9] показано, что $\bar{\nu} = s/(nm_1),\ \nu_1 = \nu + \bar{\nu} = 1/m_1,\ \Gamma_{j,\ 1} = J_1 - q^{(1)}_{j,\ 1}I - F^{(1-m_1)}$, $n+1 \leqslant j \leqslant m$. Рассмотрим матрицу

$$\varepsilon^{1/n}\mathfrak{S}_1^{-1}\left(J_1 - \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i/n}F^{(i+1-n)}\right)\mathfrak{S}_1.$$

Так как $\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-m)/n}),\ \mathfrak{S}_1^{-1} = O(\varepsilon^{s(1-m_1)/nm_1})$, то в силу (11.5) имеем

$$\mathfrak{S}_1^{-1}P\mathfrak{S}^{-1}(D(\varepsilon) - \lambda I)\ \mathfrak{S}\ P\mathfrak{S}_1 = \varepsilon^{1/m_1}(Q_1 - \varepsilon^{1/m_1}\mathcal{F}_0^{(2-n)} - \varepsilon^{2/m_1}...), \qquad (11.8)$$

где $\mathcal{F}_0^{(2-n)} = (\mathcal{V}_1^{-1}F^{(2-n)}\mathcal{V}_1)_0$, причем $P\mathfrak{S}_1^{-1}P\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-2m_1)/m_1})$. Следовательно,

$$\mathfrak{S}_1^{-1}P\mathfrak{S}^{-1}\exp(\varepsilon^{-1}D(\varepsilon)\ t)\mathfrak{S}P\mathfrak{S}_1 = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ diag\ \left(\exp(t\mu_{n+1}(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_m(\varepsilon)); 0_n\right), \qquad (11.9)$$

где

$$\mu_j(\varepsilon) = \varepsilon^{(1-m_1)/m_1}q^{(1)}_{j,\ 1} + \varepsilon^{(2-m_1)/m_1}..., \quad n+1 \leqslant j \leqslant m.$$

Теперь согласно (11.4), (11.9) находим, что

$$\exp(\varepsilon^{-1}D(\varepsilon)\ t) = \exp(\frac{t}{\varepsilon}\ \lambda)\ \mathfrak{S}\ \{(I-P)\ diag\ \left(0_{m_1}; \exp(t\mu_1(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_n(\varepsilon))\right)(I-P) +$$
$$+ P\mathfrak{S}_1\ diag\ \left(\exp(t\mu_{n+1}(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_m(\varepsilon)); 0_n\right)\mathfrak{S}_1^{-1}P\}\mathfrak{S}^{-1}. \qquad (11.10)$$

При этом

$$(I-P)\ \mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-m)/n}), \qquad P\mathfrak{S}_1^{-1}P\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-2m_1)/m_1}),$$
$$\mu_j(\varepsilon) = O(\varepsilon^{(1-n)/n}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \qquad \mu_j(\varepsilon) = O(\varepsilon^{(1-m_1)/m_1}), \quad n+1 \leqslant j \leqslant m. \qquad (11.11)$$

Поскольку, как показано в [9], $\gamma_{1-m_1,\ 1} = \dfrac{1}{\gamma_{1-n}}\displaystyle\sum_{r=m_1}^{n}\sigma_{r,\ 1}\sigma_{m,\ r+1}$, то имеет место

Следствие 11.1. *Если* $\sum_{r=m_1}^{n} \sigma_{r,\ 1}\sigma_{m,\ r+1} \neq 0$, *то справедливо представление* (11.10).

11.3. Случай II в *End PE*. Пусть $m_2 = 1,\ n_1 = m_1 - 1$. Напомним, что через $\gamma_{2-m_1,\ 1}$ обозначена сумма двух элементов однодиагональной матрицы $F^{(2-m_1)} = F^{(0)}_{2-m_1,\ 1}+$ $+\mathcal{D}_{2-m_1,\ 1}$ с номером диагонали равным $2 - m_1$.

Замечание 11.2. Тот же номер имеют матрицы $F^{(s+2)}$ и $F^{(s+n+2)}$ (последнее возможно только при $1 \leqslant s \leqslant m_1 - 2$).

Предположим, что
$$F^{(1-m_1)} = 0, \qquad \gamma_{2-m_1,\ 1} \neq 0. \tag{11.12}$$

Отдельно следует рассмотреть случай $m_1 = 2$, отличающийся от рассмотренного в п. 10.1 случая $m = 2, m_1 = 0$ тем, что $s = 2 > 1$, но $s_1 = n_1 - m_2 = 0 < 1$, и предположение 1 не выполнено. Такое исследование было проведено в [9].

Пусть $3 \leqslant m_1 \leqslant (m-1)/2,\ m_2 = 1$. Тогда согласно [9] имеем $\nu_1 = 1/(m_1 - 1),\ \bar{\nu} =$ $= (s+1)/(n(m_1 - 1)),\quad \Gamma_{m,\ 1} = J_1 - \mathcal{D}_{2-m_1,\ 1},\ \Gamma_{j,\ 1} = \Gamma_{m,\ 1} - q^{(1)}_{j,\ 1} I,\ n+1 \leqslant j \leqslant m-1.$

По аналогии с п. 9.3 имеем
$$\exp(\varepsilon^{-1}D(\varepsilon)\ t) = \exp(\varepsilon^{-1}\lambda t)\ \mathfrak{S}\ \{(I-P)\ diag\ \ (0_{m_1}; \exp(t\mu_1(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_n(\varepsilon)))\,(I-P)+$$
$$+P\mathfrak{S}_1\ diag\ \ (\exp(t\mu_m(\varepsilon)); \exp(t\mu_{n+1}(\varepsilon)), ..., \exp(t\mu_{m-1}(\varepsilon)); 0_n)\ \mathfrak{S}_1^{-1}P\}\mathfrak{S}^{-1}. \tag{11.13}$$

При этом согласно (11.6) имеем
$$P\mathfrak{S}_1 P = (I + \varepsilon^{(s+1)/n}\Omega_{1-m_1,\ 1})\bar{\Lambda}_1(\varepsilon)\Phi^{(2)}(I + \varepsilon^{1/(m_1-1)}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/(m_1-1)}Z_1^{(i)}),$$
и, кроме того,
$$(I-P)\ \mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{(1-m)/n}), \qquad P\mathfrak{S}_1^{-1}P\mathfrak{S}^{-1} = O(\varepsilon^{-2}),$$
$$\mu_j(\varepsilon) = O(\varepsilon^{(1-n)/n}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \quad \mu_j(\varepsilon) = O(\varepsilon^{(2-m_1)/(m_1-1)}), \quad n+1 \leqslant j \leqslant m-1,$$
$$\mu_m(\varepsilon) = q_{2,\ m} + \varepsilon q_{3,\ m} + \varepsilon^2 ... \tag{11.14}$$

В [9] показано, что $\gamma_{2-m_1,\ 1} = \dfrac{1}{\gamma_{1-n}}\sum_{r=m_1-1}^{n}\{\sigma_{r,\ 1}\sigma_{m-1,\ r+1} + (\sigma_{r,\ 1} + \sigma_{r+1,\ 2})\sigma_{m,\ r+2}\}$. Следовательно, имеет место

Следствие 11.2. *Если*
$$\sum_{r=m_1}^{n}\sigma_{r,\ 1}\sigma_{m,\ r+1} = 0, \qquad \sum_{r=m_1-1}^{n}\{\sigma_{r,\ 1}\sigma_{m-1,\ r+1} + (\sigma_{r,\ 1} + \sigma_{r+1,\ 2})\sigma_{m,\ r+2}\} \neq 0,$$
то справедливо представление (11.13).

Замечание 11.3. Эволюционный аналог проведенного исследования для матриц, зависящих от переменной $t,\ t \in [0,\ T]$ содержится, наряду с [9], в статьях [8, 10]. В [9] изучались также случаи сильного вырождения, упомянутые в замечаниях 11.1, 11.2. Ранее эволюционные аналоги канонических случаев $m_1 = 0$, $m_1 = 1$ для матриц, зависящих от переменной $t \in [0,\ T]$ были изучены в [5, 7] методом регуляризации. Там же был анонсирован случай $m_1 = 2$.

Список литературы

[1] Территин Х.Л. *Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр* // Математика: Сб. переводов. 1957. Т. 1. № 2. С. 29–59.

[2] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970, 536 с.

[3] Арнольд В.И. *О матрицах, зависящих от параметров* // Успехи матем. наук. 1971. Т. 25. № 2. С. 101–114.

[4] Колесов Ю.С., Кубышкин Е.П. *Минимальный алгоритм исследования устойчивости линейных систем* // Исследования по устойчивости в теории колебаний. 1977. Ярославль, изд-во ЯрГУ. С. 142–155.

[5] Елисеев А.Г. *Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора.* I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 999–1020. II // там же. 1984. Т. 48. № 6. С. 1171–1195.

[6] Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. *Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений.* М.: Наука, 1987, 254 с.

[7] Елисеев А.Г., Ломов С.А. *Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущеннных задач* // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. № 3. С. 3–53.

[8] Чернышов К.И. *Метод стандартного расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 6. С. 1311–1316.

[9] Чернышов К.И. *Асимптотический анализ уравнения с фредгольмовым оператором при производной* // Дисс. докт. физ.-мат. наук. Киев: ИМ НАН Украины, 1992.

[10] Чернышов К.И. *Асимптотические разложения решения задачи Коши для одного линейного дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 765–779.

К. И. Чернышов, Воронежская государственная лесотехническая академия, Воронеж, Россия

GENERALIZED RESOLVENTS OF ISOMETRIC OPERATORS

M. M. Malamud, V. I. Mogilevskii
Donetsk National University
Donetsk, Ukraine

INTRODUCTION.

Let $\mathfrak{H}$ be a separable Hilbert space and let A be a not necessary densely defined closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices $n_+(A) = n +_(A) \leq \infty$.

It is well known (see, for example, [6]) that the Krein-Naimark formula for generalized resolvents

$$\mathbb{R}_\lambda := P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda) \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)\big(\tau(\lambda) + M(\lambda)\big)^{-1}\gamma^*(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm. \tag{1}$$

establishes a bijective correspondence between the set of all selfadjoint (canonical and exit space) extensions $\widetilde{A}$ of A and the set of all Nevanlinna families $\tau(\lambda) \in \widetilde{R}_{\mathcal{H}}$. Here $A_0 = A_0^*$ is a fixed canonical extension of A, $\gamma(\lambda)$ is the so-called γ-field of the operator A, and $M(\lambda)$ is a Q-function of the pair (A, A_0).

A simple derivation of the Krein formula (1) as well as its relationship with a boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ for A^* (where A^* is the adjoint linear relation of A) has been obtained in [3], [4], [11]. Namely, it was shown in [3], [11] that

$$A_0 = \mathrm{Ker}\Gamma_0, \qquad \gamma(\lambda) := (\Gamma_0\lceil\mathfrak{H}_\lambda)^{-1} \quad \text{and} \quad M(\lambda) := \Gamma_1\gamma(\lambda)$$

that is $M(\lambda)$ is the Weyl function corresponding to the triplet Π, and $\mathbb{R}_\lambda g$ is the solution of the "boundary value problem"

$$\{f, g\} \in (A^* - \lambda), \qquad \{\Gamma_0\mathbb{R}_\lambda g, -\Gamma_1\mathbb{R}_\lambda g\} \in \tau(\lambda). \tag{2}$$

If A is a densely defined operator then the first relation in (2) takes a usual form $(A^* - \lambda)f = g$.

On the other hand, Krein-Naimark formula (1) has been generalized to the case of an isometric operator V $(V^*V = I)$ in the works [8] [9], [10] (see also references in [9]).

Later, we have established (see [12], [13]) an analog of the Krein formula for the resolvents of a dual pair $\{A, B\}$. Recall that a pair $\{A, B\}$ of closed linear operators A and B in $\mathfrak{H}$ is said to form a dual pair (DP), if

$$(Af, g) = (f, Bg), \qquad f \in \mathcal{D}(A),\ g \in \mathcal{D}(B).$$

More precisely, the above mentioned formula from [12], [13] has the form (1) and establishes a bijective correspondence between the set $\Omega(\{A, B\}, \lambda_0)$ of generalized resolvents$\mathbb{R}_\lambda$ being a holomorphic function at the point λ_0 and the set of families τ, which are holomorphic at the point λ_0 and satisfy $0 \in \rho\big(\tau(\lambda_0) + M(\lambda_0)\big)$.

Note, that the pair of operators $\{A, A\}$ is a dual pair if and only if A is symmetric $(A \subset A^*)$. In this case, the above mentioned formula from [12] complements the Krein formula and coincides with it for self-adjoint extensions$\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$, only when the boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is such that $A_i := ker\Gamma_i = A_i^*$ $(i = 0, 1)$.

In the paper under consideration we present a more general version of the formula for generalized U-resolvents (U is unitary in $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$) of an isometric operator V (U is a unitary operator in $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$.) This formula is more general than the corresponding formula in [9], [10], and it follows from the general formula from [12]-[13] applied to the dual pair $\{V, V^{-1}\}$.

More precisely, each boundary triplet Π of $\{V, V^{-1}\}$ generates the formula for generalized resolvents of the form (1) and its parameters A_0, M, γ and τ can be expressed (as well as in the symmetric case $(\{A, B\} = \{A, A\})$) in terms of the boundary operators. Note, however, that in the case of a dual pair $\{V, V^{-1}\}$, the analog of the Nevanlinna class, which in the symmetric case contains M and τ, is the Schur class of operator-valued contractive functions in $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

For this reson, the following nontrivial problem arises: how one can describe the boundary triplets Π of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$ whose generalized U-resolvents correspond to the operator valued functions $\tau(\lambda)^{-1}$ in formula (1) belonging to the Schur class in $\mathbb{D}$? We call such triplets contractive and describe them in Proposition 3. In this case formula of type (1) for a dual pair $\{V, V^{-1}\}$ can be transformed into the following one

$$\mathbb{R}_\lambda := P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{U} - \lambda) \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda)K(\lambda)(I - M(\lambda)K(\lambda))^{-1}\gamma^*_{\Pi^*}(\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e, \quad (3)$$

where the Weyl function $M(\lambda)$ is strictly contractive in $\mathbb{D}^e$. Here $\widetilde{U}$ is a unitary exit space extension with values in $\widetilde{\mathfrak{H}}$, A_0 is a fixed contractive extension in H , $A_0\lceil\mathcal{D}(V)^\perp$ is a strict contraction, and $K(\lambda) = \tau(\lambda)^{-1}$ runs over the Schur class in $\mathbb{D}^e$. As was done in [3], [11] in this case, all parameters in (3) can be expressed via the boundary operators of the boundary triplet Π of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$.

Note that the set of contractions $A_0 := ker\Gamma_0^{V^{-1}}$ and Weyl functions $M(\lambda)$ corresponding to the contractive boundary triplets, are described in Corollary 9 and Theorem 11 respectively. In the case of a special boundary triplet Π_0 of the form (10) formula (3) coincides with its analog from [9], [10], and the above described connection with the triplet Π_0 allows one to complete (3) in some aspects.

2. PRELIMINARIES.

Suppose that $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]([\mathfrak{H}])$ is the set of bounded operators acting from $\mathfrak{H}_1$ to $\mathfrak{H}_2$ (in $\mathfrak{H}$), P_L is the orthoprojection onto the subspace L of the space $\mathfrak{H}$.

Let us introduce the following notations: $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ ($\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$) is the set of closed linear relations (subspaces) in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ (ÿ $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$), $T^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$ is the dual relation which is adjoint to $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$; $\mathcal{D}(T)$, $R(T)$ and Ker$T$ are the domain, the image and the kernel of the relation T respectively.

The closed operator T mapping $\mathfrak{H}_1$ to $\mathfrak{H}_2$ is identified with its graph, so that $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Let $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)^{-1} \in [\mathfrak{H}]\}$ be the set of regular points of a linear relation $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{N}_T := \mathcal{D}(T)^\perp = T^*(0)$, $\hat{\mathfrak{N}}_T := \{0\} \oplus \mathfrak{N}_T \subset T^*$. By $\mathfrak{N}_\lambda(T)$ we denote the defect subspace of the relation T, , i.e.,

$$\mathfrak{N}_\lambda(T) := \mathfrak{H} \ominus \ R(T - \overline{\lambda}) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}) \quad \text{and} \quad \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(T) := \{\{f, \lambda f\} : f \in \mathfrak{N}_\lambda(T)\} \subset \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}.$$

With each pair of Hilbert spaces $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}_1$ we associate the operators (fundamental symmetries) $J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1]$, $J'_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0]$, $\widetilde{J}_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0]$ by setting

$$J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_0} & 0 \\ 0 & -I_{\mathcal{H}_1} \end{pmatrix}, \quad J'_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{H}_1} \\ -I_{\mathcal{H}_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{J}_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{H}_1} \\ I_{\mathcal{H}_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{J}_{\mathcal{H}} = \widetilde{J}_{\mathcal{H},\mathcal{H}}$$

Now we recall several necessary definitions and results from [12]-[13].

Definition 1. A linear relation $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ is called a proper extension of a dual pair $\{A, B\}$, if $A \subset \widetilde{A} \subset B^*$, i.e., $A \subset \widetilde{A}$ and $B \subset \widetilde{A}^*$. We denote by Ext$\{A, B\}$. the set of all proper extensions of the dual pair $\{A, B\}$.

Definition 2. The collection of $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$, where $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}_1$ are the Hilbert spaces, and $\Gamma^B = (\Gamma_0^B, \Gamma_1^B)^\top : B^* \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ and $\Gamma^A = (\Gamma_0^A, \Gamma_1^A)^\top : A^* \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ are linear maps, is called the boundary triplet of the dual pair $\{A, B\}$, if

(i) $\qquad \Gamma^B B^* = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \qquad \Gamma^A A^* = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0;$

(ii) the following Green formula holds:

$$(f', g) - (f, g') = (\Gamma_1^B \hat{f}, \Gamma_0^A \hat{g}) - (\Gamma_0^B \hat{f}, \Gamma_1^A \hat{g}), \qquad \hat{f} = \{f, f'\} \in B^*, \ \hat{g} = \{g, g'\} \in A^*. \quad (4)$$

The proper extensions $A_0 := \mathrm{Ker}\Gamma_0^B$ and $A_1 := \mathrm{Ker}\Gamma_1^B \in \mathrm{Ext}\{A, B\}$. are naturally related to each boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$ of the dual pair $\{A, B\}$.

The following statements are valid:

(1) $\mathrm{Ker}\Gamma^B = A$ and $\mathrm{Ker}\Gamma^A = B$, and $\Gamma^B \in [B^*, \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1]$ and $\Gamma^A \in [A^*, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0]$;

(2) the collection $\Pi^* = \{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \Gamma^A, \Gamma^B\}$ is the boundary triplet for the dual pair $\{B, A\}$;

(3)the map $\Gamma^B : \hat{f} \to \{\Gamma_0^B \hat{f}, \Gamma_1^B \hat{f}\}$ $(\hat{f} \in B^*)$ establishes a bijective correspondence between the set $\mathrm{Ext}\{A, B\}$ and the set $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) : \widetilde{A} \to \Gamma^B(\widetilde{A}) =: \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$;

We let $\widetilde{A}_\theta := \widetilde{A}$, that is,

$$\widetilde{A}_\theta := (\Gamma^B)^{-1}\theta = \{\hat{f} \in B^* : \Gamma^B \hat{f} \in \theta\}, \quad \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1).$$

In this case $(\widetilde{A}_\theta)^* \in \mathrm{Ext}\{B, A\}$ and $(\widetilde{A}_\theta)^* = \widetilde{A}_{\theta^*}$ (for the triplet Π^*);

(4) if $B_0 := \mathrm{Ker}\Gamma_0^A \in \mathrm{Ext}\{B, A\}$ and $B_1 = \mathrm{Ker}\Gamma_1^A \in \mathrm{Ext}\{B, A\}$, then $B_0 = A_0^*$ and $B_1 = A_1^*$.

For a triplet Π we define the γ-field

$$\gamma_\Pi(\lambda) := \pi_1(\Gamma_0^B \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(B))^{-1} (\in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_\lambda(B)]), \quad \lambda \in \rho(A_0),$$

where $\pi_1(\pi_2)$ is the orthoprojection in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ onto the first (second) component. It is proved in [12]-[13] that $\gamma_\Pi(\lambda)$ is a holomorphic operator-valued function in $\rho(A_0)$ satisfying the following identity

$$\gamma_\Pi(\mu) = \gamma_\Pi(\lambda) + (\mu - \lambda)(A_0 - \mu)^{-1}\gamma_\Pi(\lambda), \qquad \lambda,\ \mu \in \rho(A_0).$$

Similarly, we define the γ-field $\gamma_{\Pi^*}(z) = \pi_1(\Gamma_0^A \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_z(A))^{-1}$ $(\in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_z(A)])$ $z \in \rho(A_0^*)$, corresponding to the boundary triplet Π^*. The operator-valued function $\gamma_{\Pi^*}(z)$ is holomorphic in $\rho(A_0^*)$.

Definition 3. [12] The operator-valued function $M(\lambda) := M_\Pi(\lambda)$ defined on the domain $\rho(A_0)$ by the equality

$$\Gamma_1^B \hat{f}_\lambda = M(\lambda)\Gamma_0^B \hat{f}_\lambda, \qquad \hat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} \in \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(B), \quad \lambda \in \rho(A_0) \tag{5}$$

is called the Weyl function corresponding to a boundary triplet Π.

The operator-valued function $M(\lambda)$ is holomorphic in $\rho(A_0)$, takes values in $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ and satisfies the equality

$$M(\mu) - M(\lambda) = (\mu - \lambda)\gamma_{\Pi^*}^*(\overline{\lambda})\gamma_\Pi(\mu), \qquad \mu,\ \lambda \in \rho(A_0).$$

Moreover, the Weyl function $M_{\Pi^*}(z)$ $(z \in \rho(A_0^*))$ corresponding to the triplet Π^*, is connected with $M_\Pi(\lambda)$ by the equality $M_{\Pi^*}(\overline{\lambda}) = M_\Pi^*(\lambda)$ $(\lambda \in \rho(A_0))$.

Proposition 1. [12]-[13] Suppose that $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$ is the boundary triplet of a dual pair $\{A, B\}$, $M(\lambda)$ is the corresponding Weyl function, $A_0 := \mathrm{Ker}\Gamma_0^B$ and $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta \in \mathrm{Ext}\{A, B\}$. Then

(i) $\lambda \in \rho(\widetilde{A}_\theta) \cap \rho(A_0)$ if and only if $0 \in \rho(\theta - M(\lambda))$;

(ii) the following formula for the canonical resolvents holds true

$$(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda)(\theta - M(\lambda))^{-1}\gamma_{\Pi^*}^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \rho(A_\theta) \cap \rho(A_0). \tag{6}$$

Definition 4. The lineal $\mathcal{F}_\Pi = \Gamma^B \hat{\mathfrak{N}}_B = \{\{\Gamma_0^B \hat{n}, \Gamma_1^B \hat{n}\} : \hat{n} = \{0, n\} \in \hat{\mathfrak{N}}_B\} \subset \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ is called a forbidden relation corresponding to the boundary triplet Π.

Definition 5. A dual pair $\{A, B\}$ is called a bounded pair if $A \in [\mathcal{D}(A), \mathfrak{H}]$ and $B \in [\mathcal{D}(B), \mathfrak{H}]$.

Next we present the following simple proposition.

Proposition 2. [12]-[13] Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^B, \Gamma^A\}$ be a boundary triplet for a bounded dual pair $\{A, B\}$ such that $A_0 \in [\mathfrak{H}]$. Then

(i) the operators

$$\gamma_\Pi = \pi_2(\Gamma_0^B \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_B)^{-1} \in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_B] \quad \text{and} \quad \gamma_{\Pi^*} = \pi_2(\Gamma_0^A \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_A)^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_A]$$

are well defined;

(ii) $\mathcal{F}_\Pi \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ and the following equality holds

$$M(\lambda) = \mathcal{F}_\Pi + \gamma_{\Pi^*}^*(A_0 - \lambda)^{-1}\gamma_\Pi, \quad \lambda \in \rho(A_0). \tag{7}$$

3. CONTRACTIVE BOUNDARY TRIPLETS.

Let V be an isometry on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ with the domain $\mathcal{D}(V)$ and the range $R(V)$. Set

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_V (= \mathcal{D}(V)^\perp) \quad \text{and} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{V^{-1}} (= R(V)^\perp).$$

Since $(V^{-1})^* = (V^*)^{-1}$, the following equivalence holds: $\{f, f'\} \in (V^{-1})^* \iff \{f', f\} \in V^*$.

We denote by $C(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) := \{T \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2] : \|T\| \le 1\}$ the set of contractions from $\mathfrak{H}_1$ to $\mathfrak{H}_2$, and $C_0(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) := \{T \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2] : \|T\| < 1\}$ is the set of strict contractions; $C(\mathfrak{H}) := C(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ and $C_0(\mathfrak{H}) := C_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$. Let $C(V) := \mathrm{Ext}\{V, V^{-1}\} \cap C(\mathfrak{H})$ be the set of contractive proper extensions of a dual pair $\{V, V^{-1}\}$. A contractive extension $\widetilde{A}$ of the isometry V is of the form

$$\widetilde{A} = \mathrm{diag}(V, T) \in [\mathcal{D}(V) \oplus \mathfrak{N},\ R(V) \oplus \mathfrak{M}], \quad \text{where} \quad T \in C(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}).$$

Hence $\widetilde{A}$ is a proper contraction, that is $\widetilde{A} \in C(V)$.

Definition 6. A boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$ is said to be contractive, if the following equivalence is valid:

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta \in C(V) \iff K := \theta^{-1} \in C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$$

Let us present a contractivity criterion of a boundary triplet.

Proposition 3. Suppose that $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ is the boundary triplet of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$, $A_0 = Ker\Gamma_0^{V^{-1}}$ and $\mathcal{F}_\Pi$ is a forbidden operator. Then the following assertions are equivalent

(i) $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ is a contractive boundary triplet;

(ii) $A_0 \in C(V)$ and the operator

$$U = \begin{pmatrix} A_0 & \gamma_\Pi \\ -\gamma_{\Pi^*}^* & \mathcal{F}_\Pi \end{pmatrix} : \mathfrak{H} \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathfrak{H} \oplus \mathcal{H}_1 \tag{8}$$

is a unitary operator;

(iii) the following equalities hold

$$\Gamma_1^{V^{-1}}\{f, f'\} = -\Gamma_0^V\{f', f\}, \quad \Gamma_0^{V^{-1}}\{f, f'\} = -\Gamma_1^V\{f', f\}, \qquad \{f, f'\} \in (V^{-1})^*. \tag{9}$$

Under any of conditions (i)-(iii) the Weyl function $M(\lambda)$, corresponding to the triplet Π, is holomorphic and strictly contractive in $\mathbb{D}^e := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$.

Corollary 1. *If Π is a contractive boundary triplet of a dual pair $\{V, V^{-1}\}$, then $A_0 \upharpoonright \mathfrak{N} \in C_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$. Conversely, if $\widetilde{A}_0 \in C(V)$ and $\widetilde{A}_0 \upharpoonright \mathfrak{N} \in C_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$, then there exists a contractive boundary triplet $\Pi_0 = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ so that $\widetilde{A}_0 = A_0 := \mathrm{Ker}\Gamma_0^{V^{-1}}$.*

We obtain a simple example of a contractive boundary triplet by considering the triplet $\Pi_0 = \{\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ of the form

$$\begin{gathered}\Gamma_1^{V^{-1}}\hat{f} = -D_0 P_{\mathfrak{N}} f + (A_0')^* D_{0*}^{-1}(f' - \widetilde{A}_0 f), \quad \Gamma_0^{V^{-1}}\hat{f} = D_{0*}^{-1}(f' - \widetilde{A}_0 f), \quad \hat{f} = \{f, f'\} \in (V^{-1})^* \\ \Gamma_1^V \hat{g} = -D_{0*} P_{\mathfrak{M}} g + A_0' D_0^{-1}(g' - \widetilde{A}_0^* g), \quad \Gamma_0^V \hat{g} = D_0^{-1}(g' - \widetilde{A}_0^* g), \qquad \hat{g} = \{g, g'\} \in V^*, \end{gathered} \tag{10}$$

where

$$A_0' := \widetilde{A}_0 \upharpoonright \mathfrak{N}, \quad D_0 := (I - (A_0')^* A_0')^{1/2} \in [\mathfrak{N}] \quad \text{and} \quad D_{0*} := (I - A_0'(A_0')^*)^{1/2} \in [\mathfrak{M}].$$

Proposition 3 and formula (6) together yield

Corollary 2. *Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ be a contractive boundary triplet of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$ and let $M(\lambda)$ be the corresponding Weyl function. Then*

(i) if $\widetilde{A}_\theta \in C(V)$, then $\widetilde{A}_\theta \lceil \mathfrak{N} \in C_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ if and only if $K := \theta^{-1} \in C_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$;

(ii) the extension $\widetilde{A}_\theta \in Ext\{A, B\}$ is unitary if and only if the operator θ is unitary;

(iii) if $\widetilde{A}_\theta \in C(V)$, then formula (6) for canonical resolvents takes the form

$$(\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda) K (I - M(\lambda)K)^{-1} \gamma^*_{\Pi^*}(\overline{\lambda}), \qquad K := \theta^{-1}. \tag{11}$$

Since the matrix U in (8) is a unitary matrix for the contractive boundary triplet Π, the set $\Delta = (A_0, \gamma_\Pi, -\gamma^*_{\Pi^*}, \mathcal{F}_\Pi)$ forms a unitary colligation. The corresponding characteristic function is defined (see [2]) by

$$\theta(\lambda) := \mathcal{F}_\Pi + \lambda \gamma^*_{\Pi^*}(\lambda A_0 - I)^{-1}\gamma_\Pi, \qquad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Combining this definition with (7), we arrive at the following result

Theorem 1. *Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ be a contractive boundary triplet of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$. Then the corresponding Weyl function $M(\lambda)$ is holomorphic in $\mathbb{D}^e$, takes values in $C_0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ and is connected with the characteristic function $\theta(\lambda)$ by the equality*

$$M(\lambda) = \theta(\lambda^{-1}) \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e.$$

Conversely, for each operator-valued function $M(\lambda)$ with values in $C_0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ which is holomorphic in $\mathbb{D}^e$ there exist an isometry V and a contractive boundary triplet Π for the dual pair $\{V, V^{-1}\}$ such that the corresponding Weyl function $M_\Pi(\lambda)$ coincides with $M(\lambda)$.

4. THE FORMULAS FOR GENERALIZED RESOLVENTS AND GENERALIZED COREZOLVENTS.

For a linear relation $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ we put $R_\lambda(T) = I + 2\lambda(T - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T)$.

Definition 7. (i) The operator-valued function $\mathbb{R}_\lambda$ which is holomorphic in $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e$ and takes values in $[\mathfrak{H}]$ is called a generalized U-resolvent of an isometry V if there exist a Hilbert space $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ and a unitary operator $\widetilde{U}$ in $\widetilde{\mathfrak{H}}$ such that $V \subset \widetilde{U}$ and $\mathbb{R}_\lambda = P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{U} - \lambda)^{-1} \restriction \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e$.

(ii) The operator-valued function

$$\mathbb{T}_\lambda = I + 2\lambda \mathbb{R}_\lambda = P_{\mathfrak{H}} R_\lambda(\widetilde{U}) \restriction \mathfrak{H}, \qquad \widetilde{U} \supset V, \quad \lambda \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e$$

with V and $\widetilde{U}$ as above is called a generalized U-coresolvent of an isometry V.

In the following theorem we describe the set of the generalized U-resolvents of an isometry V.

Theorem 2. *Suppose that $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ is a contractive boundary triplet of a dual pair $\{V, V^{-1}\}$ and $M(\lambda) = M_\Pi(\lambda)$ is the corresponding Weyl function, and $M_{\Pi^*}(\lambda) = M^*(\overline{\lambda})$ is the Weyl function corresponding to the triplet $\Pi^* = \{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \Gamma^V, \Gamma^{V^{-1}}\}$ for the dual pair $\{V^{-1}, V\}$. Let also $A_0 := Ker\Gamma_0^{V^{-1}}$ and $A_1 := Ker\Gamma_1^{V^{-1}} = (A_0^*)^{-1}$. Then*

(i) $\mathbb{D}^e \subset \rho(A_0)$, $\mathbb{D} \subset \rho(A_1)$ and the formula for generalized resolvent (in the Krein-Naimark form)

$$\mathbb{R}_\lambda = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_\Pi(\lambda) K(\lambda)(I - M(\lambda)K(\lambda))^{-1} \gamma^*_{\Pi^*}(\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e \tag{12}$$

$$\mathbb{R}_\lambda = (A_1 - \lambda)^{-1} - \lambda^{-2} \gamma_{\Pi^*}(\lambda^{-1}) K^*(\overline{\lambda}^{-1}) \big(I - M_{\Pi^*}(\lambda^{-1}) K^*(\overline{\lambda}^{-1})\big)^{-1} \gamma^*_\Pi(\overline{\lambda}^{-1}), \qquad \lambda \in \mathbb{D} \tag{13}$$

establishes a bijective correspondence between the set of all generalized U-resolvents $\mathbb{R}_\lambda$ and the set of all operator-valued functions $K(\lambda)$ which are holomorphic in $\mathbb{D}^e$ and take values in $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$;

The generalized resolvent $\mathbb{R}_\lambda$ in (12), (13) is canonical if and only if $K(\lambda) =: K = (K^{-1})^*$ is a constant unitary operator from $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ (the canonical extensions exist if and only if $\dim \mathfrak{N}_0 = \dim \mathfrak{N}_\infty$);

(ii) the formula for generalized resolvents admits the following representation (the A. V. Straus form)

$$\mathbb{R}_\lambda = \begin{cases} (\widetilde{A}_{\tau_1(\lambda)} - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{D}^e \\ (\widetilde{A}_{\tau_2(\lambda)} - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{D}, \end{cases}$$

where $\tau_1(\lambda) := K^{-1}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{D}^e$*, and* $\tau_2(\lambda) := K^*(\overline{\lambda}^{-1}),\ \lambda \in \mathbb{D}$*;*

(iii) for each $g \in \mathfrak{H}$ *the vector-valued function* $f := \mathbb{R}_\lambda g$ *is a solution of the following boundary value problem with the spectral parameter* $K(\lambda)$ *in the "boundary condition"*

$$\hat{f} = \{f, \lambda f + g\} \in (V^{-1})^*, \qquad \begin{cases} \Gamma_0^{V^{-1}} \hat{f} = K(\lambda)\Gamma_1^{V^{-1}} \hat{f}, & \lambda \in \mathbb{D}^e, \\ \Gamma_1^{V^{-1}} \hat{f} = K^*(\overline{\lambda}^{-1})\Gamma_0^{V^{-1}} \hat{f}, & \lambda \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

A description of the set of all generalized U-coresolvents of an isometry V is immediately implied by Theorem 2.

Theorem 3. *Under the assumptions of Theorem 2 the following statements are valid:*

(i) the formula for generalized U*-coresolvents (in the Krein-Naimark form)*

$$\mathbb{T}_\lambda = R_\lambda(A_0) + 2\lambda\gamma_\Pi(\lambda)K(\lambda)(I - M(\lambda)K(\lambda))^{-1}\gamma_{\Pi^*}^*(\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e \tag{14}$$

$$\mathbb{T}_\lambda = R_\lambda(A_1) - 2\lambda^{-1}\gamma_{\Pi^*}(\lambda^{-1})K^*(\overline{\lambda}^{-1})\big(I - M_{\Pi^*}(\lambda^{-1})K^*(\overline{\lambda}^{-1})\big)^{-1}\gamma_\Pi^*(\overline{\lambda}^{-1}), \qquad \lambda \in \mathbb{D} \tag{15}$$

establishes a bijective correspondence between the set of all generalized U*-coresolvents* $\mathbb{T}_\lambda$ *and the set of all operator-valued functions* $K(\lambda)$ *which are holomorphic in* $\mathbb{D}^e$ *and take values in* $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$*;*

The generalized U*-coresolvent* $\mathbb{T}_\lambda$ *in* (14), (15) *is canonical if and only if* $K(\lambda) =: K = (K^{-1})^*$ *is a constant unitary operator from* $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0)$ *(the canonical extensions exist if and only if* $\dim \mathfrak{N}_0 = \dim \mathfrak{N}_\infty$*);*

(ii) the formula for generalized U*-coresolvents admits the following representation in the A. V. Straus form:*

$$\mathbb{T}_\lambda = \begin{cases} I + 2\lambda(\widetilde{A}_{\tau_1(\lambda)} - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{D}^e \\ I + 2\lambda(\widetilde{A}_{\tau_2(\lambda)} - \lambda)^{-1}, & \lambda \in \mathbb{D}, \end{cases}$$

where $\tau_1(\lambda) := K^{-1}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{D}^e$*, and* $\tau_2(\lambda) := K^*(\overline{\lambda}^{-1}),\ \lambda \in \mathbb{D}$*;*

(iii) for each $g \in \mathfrak{H}$ *the vector-valued function* $f := \mathbb{T}_\lambda g$ *is a solution of the following boundary value problem with the spectral parameter* $K(\lambda)$ *in the "boundary condition"*

$$\hat{f} = \{f - g, \lambda(f + g)\} \in (V^{-1})^*, \qquad \begin{cases} \Gamma_0^{V^{-1}} \hat{f} = K(\lambda)\Gamma_1^{V^{-1}} \hat{f}, & \lambda \in \mathbb{D}^e, \\ \Gamma_1^{V^{-1}} \hat{f} = K^*(\overline{\lambda}^{-1})\Gamma_0^{V^{-1}} \hat{f}, & \lambda \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Remark 5. Emphasize that only the both formulas (12) and (13) describe generalized U-resolvents of the operator V. More precisely, the first one by itself describes only the generalized resolvents generated by all contractive extensions, and the second one describes the generalized resolvents generated by those expanding extensions of $\widetilde{A} \in \mathrm{Ext}\{V, V^{-1}\}$, for which $0 \in \rho(\widetilde{A})$.

The same is also true for formulas (14) and (15) for the generalized U-coresolvents as well.

Remark 6. Let $\Pi = \{\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ be a contractive boundary triplet of the form (10). Then

$$\gamma_\Pi(\lambda) = -(\widetilde{A}_0 - \lambda)^{-1}D_{0*},\ \gamma_{\Pi^*}^*(\overline{\lambda}) = -(\widetilde{A}_0^* - \overline{\lambda})^{-1}D_0$$

and

$$M(\lambda) = (A_0 \restriction \mathfrak{N})^* + D_0 P_{\mathfrak{N}}(\widetilde{A}_0 - \lambda)^{-1}D_{0*}, \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e.$$

Now formula (12) can be rewritten as

$$\mathbb{R}_\lambda = (\widetilde{A}_0 - \lambda)^{-1} + (\widetilde{A}_0 - \lambda)^{-1}D_{0*}K(\lambda)(I - M(\lambda)K(\lambda))^{-1}D_0 P_{\mathfrak{N}}(\widetilde{A}_0 - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{D}^e. \tag{16}$$

Formula (16) for generalized resolvents coincides with that from [9, 10], where it was derived in a different way.

However, an analog of formula (16) for $\lambda \in \mathbb{D}$ has not been obtained in [9, 10]. Moreover, we note that $A_1 = (A_0^*)^{-1}$ in (13), in general, is a linear relation but not an operator.

5. A BOUNDARY TRIPLET OF AN ISOMETRIC OPERATOR AND THE CORRESPONDING FORMULA FOR GENERALIZED RESOLVENTS.

Let V be an isometry and let $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma^{V^{-1}}, \Gamma^V\}$ be a contractive boundary triplet of the dual pair $\{V, V^{-1}\}$. Setting

$$\Gamma_0 := \Gamma_0^{V^{-1}} = \pi_0 \Gamma^{V^{-1}} \quad \text{and} \quad \Gamma_1 := \Gamma_1^{V^{-1}} = \pi_1 \Gamma^{V^{-1}}, \tag{17}$$

we conclude that the map $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$ is a surjection. Since the triplet Π is contractive relations (9) allow us to reduce the number of different mappings in the Green formula (4) from fore to two. So, combining (17) with (9) we obtain the following version of the Green formula (4)

$$(f', g') - (f, g) = (\Gamma_0 \hat{f}, \Gamma_0 \hat{g}) - (\Gamma_1 \hat{f}, \Gamma_1 \hat{g}), \qquad \hat{f} = \{f, f'\},\ \hat{g} = \{g, g'\} \in (V^{-1})^*. \tag{18}$$

Summarizing we arrive at the following definition wich is important in the sequel.

Definition 8. A triplet $\Pi := \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, where $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}_1$ are Hilbert spaces and $\Gamma_0 : (V^{-1})^* \to \mathcal{H}_0$ and $\Gamma_1 : (V^{-1})^* \to \mathcal{H}_1$ are linear mappings, will be called a boundary triplet of an isometry V if

(i) the mapping $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top : (V^{-1})^* \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ is surjective,

and

(ii) the Green formula (18) holds true.

We associate with every boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ of the isometry V a boundary triplet $\Pi' = \{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \Gamma_0', \Gamma_1'\}$ of the isometry V^{-1}, where the operators $\Gamma_0' : V^* \to \mathcal{H}_1$ and $\Gamma_1' : V^* \to \mathcal{H}_0$ are defined by

$$\Gamma_0'\{f, f'\} = -\Gamma_1\{f', f\}, \quad \Gamma_1'\{f, f'\} = -\Gamma_0\{f', f\}, \quad \{f, f'\} \in V^*. \tag{19}$$

Next we set

$$\gamma_0(\lambda) := \pi_1 \big(\Gamma_0 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\lambda(V^{-1})\big)^{-1}, \quad M_0(\lambda) := M(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A_0)$$

and $\gamma_1(\mu) := \pi_1 \big(\Gamma_1 \upharpoonright \hat{\mathfrak{N}}_\mu(V^{-1})\big)^{-1}$, $\mu \in \mathbb{D}$.

Consider the operator function $M_1(\mu)$ defined by

$$\Gamma_0 \hat{f}_\mu = M_1(\mu) \Gamma_1 \hat{f}_\mu, \qquad \hat{f}_\mu = \{f_\mu, \mu f_\mu\} \in \hat{\mathfrak{N}}_\mu(V^{-1}), \quad \mu \in \rho(A_1).$$

It is clear that M_1 is holomorphic in $\rho(A_1)$ and takes values in $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$. Moreover the following relations hold true

$$\gamma_0(\lambda) = \gamma_\Pi(\lambda), \quad \gamma_1(\mu) = -\mu^{-1} \gamma_{\Pi^*}(\mu^{-1}) \quad \text{and} \qquad M_1(\mu) = M_{\Pi^*}(\mu^{-1}).$$

We mention also the following important relations

$$I - M_0^*(z) M_0(\lambda) = (\lambda \overline{z} - 1) \gamma_0^*(z) \gamma_0(\lambda), \qquad \lambda, z \in \rho(A_0)$$

and

$$I - M_1^*(\omega) M_1(\mu) = (1 - \mu \overline{\omega}) \gamma_1^*(\omega) \gamma_1(\mu), \qquad \mu, \omega \in \rho(A_1).$$

It follows that both M_0 and M_1 are contractive in $\mathbb{D}^e$ and $\mathbb{D}$ respectively, that is

$$||M_0(\lambda)|| < 1, \quad \lambda \in \mathbb{D}^e \quad \text{and} \quad ||M_1(\mu)|| < 1, \quad \mu \in \mathbb{D}.$$

Note that the linear relation $A_1 (= (A_0^*)^{-1})$ in (13) has the form $A_1 = Ker \Gamma_1$.
Now formulas (12), (13) can be rewritten in a more symmetric form:

$$\mathbb{R}_\lambda = (A_0 - \lambda)^{-1} - \lambda^{-1} \gamma_0(\lambda) K(\lambda) \big(I - M_0(\lambda) K(\lambda)\big)^{-1} \gamma_1^*\big(\overline{\lambda}^{-1}\big), \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e,$$

$$\mathbb{R}_\lambda = (A_1-\lambda)^{-1} + \lambda^{-1}\gamma_1(\lambda)K^*\big(\overline{\lambda}^{-1}\big)\big(I - M_1(\lambda)K^*(\overline{\lambda}^{-1})\big)^{-1}\gamma_0^*\big(\overline{\lambda}^{-1}\big), \qquad \lambda\in\mathbb{D}.$$

where $K(\lambda)$ is holomorphic in $\mathbb{D}^e$ and takes values in $C(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0)$;

Similarly formulas (14) and (15) can be rewritten in the following form:

$$\mathbb{T}_\lambda = R_\lambda(A_0) - 2\gamma_0(\lambda)K(\lambda)\big(I - M_0(\lambda)K(\lambda)\big)^{-1}\gamma_1^*\big(\overline{\lambda}^{-1}\big), \qquad \lambda\in\mathbb{D}^e \tag{20}$$

and

$$\mathbb{T}_\lambda = R_\lambda(A_1) + 2\gamma_1(\lambda)K^*(\overline{\lambda}^{-1})\big(I - M_1(\lambda)K^*(\overline{\lambda}^{-1})\big)^{-1}\gamma_0^*\big(\overline{\lambda}^{-1}\big), \qquad \lambda\in\mathbb{D}. \tag{21}$$

6. L-PRERESOLVENT MATRICES OF AN ISOMETRY.

We associate with every boundary triplet Π and each subspace L of $\mathfrak{H}$ the matrix-valued functions

$$A_{\Pi L}(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} M_1(\lambda) & -\sqrt{2}\gamma_0^*(\overline{\lambda}^{-1})\restriction L \\ \sqrt{2}P_L\gamma_1(\lambda) & P_L R_\lambda(A_1)\restriction L\end{pmatrix} \qquad \lambda\in\rho(A_1) \tag{22}$$

and

$$\widetilde{A}_{\Pi L}(\lambda) = (\widetilde{a}_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} M_0(\lambda) & \sqrt{2}\gamma_1^*(\overline{\lambda}^{-1})\restriction L \\ -\sqrt{2}P_L\gamma_0(\lambda) & P_L R_\lambda(A_0)\restriction L\end{pmatrix} \qquad \lambda\in\rho(A_0) \tag{23}$$

with values in $[\mathcal{H}_1\oplus L, \mathcal{H}_0\oplus L]$ and $[\mathcal{H}_0\oplus L, \mathcal{H}_1\oplus L]$ respectively.

The matrices $A_{\Pi L}(\lambda)$ and $\widetilde{A}_{\Pi L}(\lambda)$ will be called the L-preresolvent matrices of the operator V corresponding to the triplet Π.

Note that L-preresolvent matrices $A_{\Pi L}(\lambda)$ and $\widetilde{A}_{\Pi L}(\lambda)$ are not contractive. Starting with $A_{\Pi L}(\lambda)$ and $\widetilde{A}_{\Pi L}(\lambda)$ we introduce the new matrix-functions

$$B_{\Pi L}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) + a_{12}(\lambda)(a_{22}(\lambda)+I)^{-1}a_{21}(\lambda) & \sqrt{2}a_{12}(\lambda)(a_{22}(\lambda)+I)^{-1} \\ -\sqrt{2}(a_{22}(\lambda)+I)^{-1}a_{21}(\lambda) & I - 2(a_{22}(\lambda)+I)^{-1}\end{pmatrix}, \ \lambda\in\mathbb{D}$$

and

$$\widetilde{B}_{\Pi L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}(\lambda) - \widetilde{a}_{12}(\lambda)(\widetilde{a}_{22}(\lambda)-I)^{-1}\widetilde{a}_{21}(\lambda) & \sqrt{2}\widetilde{a}_{12}(\lambda)(\widetilde{a}_{22}(\lambda)-I)^{-1} \\ -\sqrt{2}(\widetilde{a}_{22}(\lambda)-I)^{-1}\widetilde{a}_{21}(\lambda) & I + 2(\widetilde{a}_{22}(\lambda)-I)^{-1}\end{pmatrix}, \ \lambda\in\mathbb{D}^e$$

which are already contractive.

Note also a simple relation $(B_{\Pi L}(\lambda))^* = \widetilde{B}_{\Pi L}(\overline{\lambda}^{-1}),\ \ \lambda\in\mathbb{D}$.

Further, we associate with each boundary triplet Π of an isometry V and each subspace L of $\mathfrak{H}$ the matrix-valued functions

$$G_0(\lambda) := (A_0^* - \lambda^{-1})^{-1}(P_L(A_0^*-\lambda^{-1})^{-1}\restriction L)^{-1}, \qquad \lambda\in\mathbb{D},$$
$$\widetilde{G}_0(\lambda) := \lambda^{-1}A_0(A_0-\lambda)^{-1}(P_L(A_0-\lambda)^{-1}\restriction L)^{-1}, \qquad \lambda\in\mathbb{D}^e.$$

and

$$G(\lambda) = \big((-I + G_0(\lambda)P_L)\gamma_1(\lambda) \quad G_0(\lambda)\big) \in [\mathcal{H}_1\oplus L, \mathfrak{H}], \quad \lambda\in\mathbb{D}$$
$$\widetilde{G}(\lambda) = \big((I - \widetilde{G}_0(\lambda)P_L)\gamma_0(\lambda) \quad -\widetilde{G}_0(\lambda)\big) \in [\mathcal{H}_0\oplus L, \mathfrak{H}], \quad \lambda\in\mathbb{D}^e.$$

Now we are ready to state the following proposition.

Proposition 4. Let Π a boundary triplet for an isometry V in $\mathfrak{H}$, let L be a subspace of $\mathfrak{H}$ and let $B_{\Pi L}(\lambda), \widetilde{B}_{\Pi L}(\lambda), G(\lambda)$ and $\widetilde{G}(\lambda)$ be as above. Then the following relations hold true

$$I - B_{\Pi L}^*(\lambda)B_{\Pi L}(\mu) = (1-\overline{\lambda}\mu)G^*(\lambda)G(\mu), \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{D}, \tag{24}$$

$$I - \widetilde{B}_{\Pi L}^*(\lambda)\widetilde{B}_{\Pi L}(\mu) = (\overline{\lambda}\mu - 1)\widetilde{G}^*(\lambda)\widetilde{G}(\mu), \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{D}^e. \tag{25}$$

In particular the matrix-valued functions $B_{\Pi L}(\lambda)$ and $\widetilde{B}_{\Pi L}(\lambda)$ are contractive,

$$||B_{\Pi L}(\lambda)|| \le 1, \quad \lambda\in\mathbb{D} \quad \text{and} \quad ||\widetilde{B}_{\Pi L}(\lambda)|| \le 1, \quad \lambda\in\mathbb{D}^e.$$

7. L-RESOLVENT MATRICES AND FORMULAS FOR L-RESOLVENTS.

7.1. L-resolvent matrices. Let V be an isometry in $\mathfrak{H}$ and let L be a subspace in $\mathfrak{H}$. A point $\lambda \in \mathbb{C}$ is called L-regular if $\lambda \in \hat{\rho}(V)$ and the direct sum decomposition holds

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_\lambda(V) \dotplus L. \tag{26}$$

The set $\rho(V, L)$ of all L-regular points is open in $\mathbb{C}$. Next for each pair of subspaces L_0, L_1 of $\mathfrak{H}$ we set

$$\rho_V(L_0, L_1) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \rho(V, L_0),\ \ \overline{\lambda}^{-1} \in \rho(V, L_1)\}.$$

Let Π be a boundary triplet of an isometry V, let L be a subspace of $\mathfrak{H}$, and let $A_{\Pi L}(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ and $\widetilde{A}_{\Pi L}(\lambda) = (\widetilde{a}_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ be the preresolvent matrices defined by (22) and (23) respectively. It is not difficult to show that for $\lambda \in \rho(A_0)$ and $\mu \in \rho(A_1)$ the following equivalences hold true

$$\lambda \in \rho(V, L) \iff 0 \in \rho(\widetilde{a}_{12}(\lambda)) \quad \text{and} \quad \mu \in \rho(V, L) \iff 0 \in \rho(a_{12}(\mu)).$$

Definition 9. To the matrices $A_{\Pi L}(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ and $\widetilde{A}_{\Pi L}(\lambda) = (\widetilde{a}_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$, the operator-valued matrices

$$W_{\Pi L}(\lambda) = \sqrt{2}\lambda \begin{pmatrix} a_{21}(\lambda) + a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda) & a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda) \\ a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda) & a_{12}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(V, L) \tag{27}$$

$$\widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda) = \sqrt{2}\lambda \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{21}(\lambda) - \widetilde{a}_{22}(\lambda)\widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda)\widetilde{a}_{11}(\lambda) & \widetilde{a}_{22}(\lambda)\widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda) \\ -\widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda)\widetilde{a}_{11}(\lambda) & \widetilde{a}_{12}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(V, L) \tag{28}$$

can be assigned in a unique way. We shall call them (cf. [8], [9]) the L-resolvent matrices of the isometry V, corresponding to the boundary triplet Π or for brevity the ΠL-resolvent matrices of the isometry V.

The operator-valued function $W_{\Pi L}(\lambda)$ ($\widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda)$) is holomorphic in $\rho(A_1) \cap \rho(V, L)$ (in $\rho(A_0) \cap \rho(V, L)$) and takes values in $[\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, L \oplus L]$ (in $[\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, L \oplus L]$).

7.2. Formulas for L-resolvents.

Next, let L be a subspace of $\mathfrak{H}$. Formulas (20) and (21) make it possible to describe all the L-resolvents of the isometry V. Recall, that an operator-valued function $P_L \mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L$ ($\lambda \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e$) is called an L-coresolvent of the isometry V. Here P_L is the orthogonal projection onto L.

Recall also that a non-decreasing operator-valued function $\Sigma_L(t) = \Sigma_L(t-0)$ ($t \in [-\pi, \pi]$) is called an L-spectral function of the isometry V, if it admits a representation $\Sigma_L(t) = P_L E(t) \upharpoonright L$, where E is a generalized spectral function of the isometry V. The function Σ_L is called orthogonal if E is orthogonal, that is E is the spectral function of the canonical unitary extension $U \supset V,\ U \in [\mathfrak{H}]$.

Note that the orthogonal spectral functions exist if and only if $\dim \mathcal{D}(V)^\perp = \dim\ R(V)^\perp$.

The formula

$$P_L \mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda}\, d\Sigma_L(t), \quad \lambda \in \mathbb{D} \cup \mathbb{D}^e,$$

establishes a bijective correspondence between the set of all spectral functions of V and the set of all generalized L-coresolvents $P_L \mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L$.

Next we describe the set of all L-coresolvents of the isometry V.

Theorem 4. *Let V be an isometry in $\mathfrak{H}$ and let L_0 and L_1 be subspaces in $\mathfrak{H}$ such that $\mathbb{D} \cap \rho(V, L_0) \neq \emptyset$ and $\mathbb{D}^e \cap \rho(V, L_1) \neq \emptyset$. Suppose also that $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is a boundary triplet for V and $W_{\Pi L_0}(\lambda) = (w_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2$ $\big(\widetilde{W}_{\Pi L_1}(\lambda) = (\widetilde{w}_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^2\big)$ is the corresponding ΠL_0-resolvent (ΠL_1-resolvent) matrix of the form* (27) *((28)).*

Then the first (second) of the following formulas

$$P_{L_0} \mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L_0 = \big(w_{11}(\lambda)K(\lambda) - w_{12}(\lambda)\big) \cdot \big(w_{21}(\lambda)K(\lambda) - w_{22}(\lambda)\big)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{D} \cap \rho(V, L_0) \tag{29}$$

$$P_{L_1}\mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L_1 = \big(\widetilde{w}_{11}(\lambda)K^*(\overline{\lambda}^{-1}) + \widetilde{w}_{12}(\lambda)\big)\cdot\big(\widetilde{w}_{21}(\lambda)K^*(\overline{\lambda}^{-1}) + w_{22}(\lambda)\big)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{D}^e \cap \rho(V, L_1) \tag{30}$$

establishes a bijective correspondence between the set of all L_0-coresolvents $P_{L_0}\mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L_0$ (L_1-coresolvents $P_{L_1}\mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L_1$) and the set of operator-valued functions $K(\lambda)$ holomorphic in $\mathbb{D}$ with values in $C(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

The generalized L_0-coresolvent (L_1-coresolvent) in (29) *(*(30)*) is canonical if and only if $K(\lambda) =: K = (K^{-1})^*$ is a unitary constant from $C(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ (the canonical extensions exist iff* $\dim \mathcal{D}(V)^\perp = \dim\ R(V)^\perp$*).*

Доказательство. Let $\lambda \in \mathbb{D} \cap \rho(V, L_0)$. Then the required formula (29) is immediately implied by formula (21) for the generalized coresolvents of V. Indeed, in view of definitions (22) and (27), it follows from (21) that

$$\begin{aligned} P_{L_0}\mathbb{T}_\lambda \upharpoonright L_0 &= P_{L_0}R_\lambda(A_1) \upharpoonright L_0 + 2P_{L_0}\gamma_1(\lambda)K(\lambda)\big(I - M_1(\lambda)K(\lambda)\big)^{-1}\gamma_0^*\big(\overline{\lambda}^{-1}\big) \upharpoonright L_0 \\ &= a_{22}(\lambda) - a_{21}(\lambda)K(\lambda)[I - a_{11}(\lambda)K(\lambda)]^{-1}a_{12}(\lambda) \\ &= a_{22}(\lambda) - a_{21}(\lambda)K(\lambda)[a_{12}(\lambda)^{-1}(I - a_{11}(\lambda)K(\lambda))]^{-1} \\ &= \{a_{22}(\lambda)a_{12}(\lambda)^{-1} - \big(a_{22}(\lambda)a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda) + a_{21}(\lambda)\big)K(\lambda)\}\{a_{21}^{-1}(\lambda) - a_{12}^{-1}(\lambda)a_{11}(\lambda)K(\lambda)\}^{-1} \\ &= \big(w_{11}(\lambda)K(\lambda) - w_{12}(\lambda)\big)\cdot\big(w_{21}(\lambda)K(\lambda) - w_{22}(\lambda)\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Formula (30) is implied similarly by formula (20). □

8. SPECIAL FORMULAS FOR L-RESOLVENT MATRICES OF AN ISOMETRY.

Following [7] and [9] we consider two holomorphic operator-valued functions defined on the set $\rho(V, L)$: $\mathcal{P}_L(\lambda)$, the operator of projection onto L parallel to $\mathfrak{M}_\lambda(V)$, corresponding to the decomposition (26) and

$$\mathcal{Q}_L(\lambda) = \mathcal{P}_L(\lambda) - 2\lambda P_L(V - \lambda)^{-1}(I - \mathcal{P}_L(\lambda)),$$

where P_L is the orthogonal projection of $\mathfrak{H}$ onto L. It is clear that both $\mathcal{P}_L(\lambda)$ and $\mathcal{Q}_L(\lambda)$ take values in $[\mathfrak{H}, L]$.

Next we set

$$\hat{\mathcal{P}}_L(\lambda) = (\mathcal{P}_L(\lambda) \quad \lambda\mathcal{P}_L(\lambda)), \qquad \hat{\mathcal{Q}}_L(\lambda) = (\mathcal{Q}_L(\lambda) \quad \lambda\mathcal{Q}_L(\lambda) - 2\lambda P_L)$$

and

$$G_L(\lambda) := \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_L(\lambda) \\ \mathcal{P}_L(\lambda) \end{pmatrix} = \mathrm{col}(\mathcal{Q}_L(\lambda) \ \ \mathcal{P}_L(\lambda)), \qquad \hat{G}_L(\lambda) := \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_L(\lambda) \\ \hat{\mathcal{P}}_L(\lambda) \end{pmatrix} = \mathrm{col}(\hat{\mathcal{Q}}_L(\lambda) \ \ \hat{\mathcal{P}}_L(\lambda)). \tag{31}$$

Both operator-valued functions $\hat{\mathcal{P}}_L$ and $\hat{\mathcal{Q}}_L$ take values in $[\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}, L]$. Moreover, $\hat{\mathcal{P}}_L^*(\lambda)L \subset V^*$ and $\hat{\mathcal{Q}}_L^*(\lambda)L \subset V^*$.

Note also that the operator-valued functions $G_L(\lambda)$ and $\hat{G}_L(\lambda)$ take values in $[\mathfrak{H}, L \oplus L]$) and $[\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}, L \oplus L]$ resprctively.

Theorem 5. *Suppose that $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is a boundary triplet for an isometry V, $\Pi' = \{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \Gamma_0', \Gamma_1'\}$ is the corresponding boundary triplet for V^{-1} (see* (19)*) and L is a subspace of $\mathfrak{H}$. Let also $\Gamma' := col(\Gamma_0' \ \Gamma_1')$ and $\widetilde{\Gamma}' := col(\Gamma_1' \ \ -\Gamma_0')$. Then*

(i) the operator-valued functions

$$W(\lambda) := (\Gamma'\hat{G}_L^*)^* = \begin{pmatrix} \Gamma_0'\hat{\mathcal{Q}}_L^*(\lambda) & \Gamma_0'\hat{\mathcal{P}}_L^*(\lambda) \\ \Gamma_1'\hat{\mathcal{Q}}_L^*(\lambda) & \Gamma_1'\hat{\mathcal{P}}_L^*(\lambda) \end{pmatrix}^*, \qquad \lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(V, L) \tag{32}$$

and

$$\widetilde{W}(\lambda) := (\widetilde{\Gamma}'\hat{G}_L^*)^* = \begin{pmatrix} \Gamma_1'\hat{\mathcal{Q}}_L^*(\lambda) & \Gamma_1'\hat{\mathcal{P}}_L^*(\lambda) \\ -\Gamma_0'\hat{\mathcal{Q}}_L^*(\lambda) & -\Gamma_0'\hat{\mathcal{P}}_L^*(\lambda) \end{pmatrix}^*, \qquad \lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(V, L) \tag{33}$$

coinside with the ΠL*-resolvents matrices* $W_{\Pi L}(\lambda)$ *and* $\widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda)$ *of the form* (27) *and* (28) *respectively, that is* $W(\lambda) = W_{\Pi L}(\lambda)$ *and* $\widetilde{W}(\lambda) = \widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda)$;

(ii) for all $\lambda, \mu \in \rho(V, L)$ *the* ΠL*-resolvent matrices* $W_{\Pi L}(\lambda)$ *and* $\widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda)$ *satisfy the identities*

$$W_{\Pi L}(\mu) J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} W^*_{\Pi L}(\lambda) = (\mu\overline{\lambda} - 1) G_L(\mu) G^*_L(\lambda) - 2\mu\overline{\lambda}\widetilde{J}_L, \tag{34}$$

$$\widetilde{W}_{\Pi L}(\mu) J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1} \widetilde{W}^*_{\Pi L}(\lambda) = (1 - \mu\overline{\lambda}) G_L(\mu) G^*_L(\lambda) + 2\mu\overline{\lambda}\widetilde{J}_L. \tag{35}$$

Proposition 5. Let $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for an isometry V, let L be a subspace of $\mathfrak{H}$ and let $W_{\Pi L}(\lambda)$ and $\widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda)$ be the corresponding ΠL-resolvent matrices. Let also $W_{\widetilde{\Pi} L}(\lambda)$ and $\widetilde{W}_{\widetilde{\Pi} L}(\lambda)$ be the $\widetilde{\Pi} L$-resolvent matrices corresponding to a boundary triplet $\widetilde{\Pi}$.

Then there exist a pair $\{Z, \widetilde{Z}\}$ where Z is a $J_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0}$-unitary operator in $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ and $\widetilde{Z}$ is a $J_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1}$-unitary operator in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, such that

$$W_{\widetilde{\Pi} L}(\lambda) = W_{\Pi L}(\lambda) Z, \qquad \widetilde{W}_{\widetilde{\Pi} L}(\lambda) = \widetilde{W}_{\Pi L}(\lambda) \widetilde{Z}. \tag{36}$$

Moreover $\widetilde{Z}$ and Z are connected by the equality $\widetilde{Z} = -J'_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0} Z J'_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1}$.

Conversely, for each pair $\{Z, \widetilde{Z}\}$ of operators with the above properties there exists a boundary triplet $\widetilde{\Pi}$ such that the corresponding $\widetilde{\Pi} L$-resolvent matrices $W_{\widetilde{\Pi} L}(\lambda)$ and $\widetilde{W}_{\widetilde{\Pi} L}(\lambda)$ satisfy (36).

Remark 7. A concept of L-resolvent matrix $W(\lambda)$ of a symmetric operator A in $\mathfrak{H}$ with deficiency indices (1,1) has been introduced by M. G. Krein [5]. Further, M. G. Krein and S. N. Saakyan have discovered the following abstract version of the Christofel identity for $W_L(\lambda)$

$$W_L(\lambda) J W^*_L(\mu) - J = i(\lambda - \mu) G_L(\lambda) G^*_L(\mu) \tag{37}$$

where $G_L(\lambda) := \operatorname{col}(-\mathcal{Q}_L(\lambda) \ \ \mathcal{P}_L(\lambda))$ and the operator-valued functions $\mathcal{P}_L(\lambda)$ and $\mathcal{Q}_L(\lambda)$ are defined similarly to that for an isometric operator. Both functions $\mathcal{P}_L(\lambda)$ and $\mathcal{Q}_L(\lambda)$ are the abstract analog of the orthogonal polynomials of the first and the second kind respectively. Formula (37) allowed Krein and Saakyan to obtain an explicit formula for $W_L(\lambda)$ by means of the operator-valued function $G(\lambda)$ in the case $\rho(A; L) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

In [3] and [4] V. A. Derkach and one of the coauthors associated with each boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ for A^* and each subspace L of $\mathfrak{H}$, the ΠL-resolvent matrix $W_{\Pi L}(\lambda)$ and obtained the explicit formula $W_{\Pi L}(\lambda) = \left(\Gamma G^*(\lambda)\right)^*$. This formula shows how to evaluate $W_{\Pi L}(\lambda)$ by means of $\mathcal{P}_L(\lambda)$ and $\mathcal{Q}_L(\lambda)$ and the boundary mapping $\Gamma = \operatorname{col}\{\Gamma_0 \ \Gamma_1\}$ and is valid even in the case $\rho(A, L) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

It is worth to note that, as it was found out in [3] and [4], formula (37) for $W_{\Pi L}(\lambda)$ is a cosequence of the abstract Green identity and a special J. von Neumann type formula for A^*.

Formulas (32) and (33) generalize the above mentioned formulae from [3] and [4] to the case of an isometric operator. Moreover, as in the case of a symmetric operator, both (34) and (35) are implied by the Green identity (18) and a special J. von Neumann type formula for V^*. Note also that formula close to (34) has been established by a different way in [8], [9].

We mention also the paper [1] close to the topic of our one. A result close to Theorem 4 is also contained in [1].

References

[1] Arov D.Z., Grossman L.Z., Scattering matrices in the theory of extensions ofisometric operators, Dokl. Akad. Nauk, Vol. 270 (1983), No 1, 17-20.

[2] M. S. Brodskii, Unitary operator colligations and their chracteristic functions, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys, 33 (1978), no. 4, 141-168.

[3] V. A. Derkach and M. M. Malamud, Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps, J. Func. Anal., 95 (1991), No. 1, 1-95.

[4] V. A. Derkach and M. M. Malamud, The extension theory of hermitian operators and the moment problem, J. Math. Sciences, 73 (1995), 141-242.

[5] M.G. Krein, On Hermitian operators with deficiency indecies (1,1), Dokl. Acad. Nauk, Vol. 43, No 8. (1944), 339-342.

[6] M. G. Krein and H. Langer, On defect subspaces and generalized resolvents of Hermitian operator in Pontryagin space, Funktsional. Anal. i Prilozhen. [Functional Anal. Appl.], Vol. 5, (1971), No 2, 59-71; Vol. 5, no. 3 (1971), 54-69 (Russian) (English translation: Funct. Anal. Appl., 5(1971), 136-146; 5(1971), 217-228).

[7] M. G. Krein and S. N. Saakjan, Some new results in the theory of resolvent of Hermitian operators, Dokl. Acad. Nauk, Vol. 169, No 6. (1966), 1269-1272.

[8] H. Langer, Generalized Coresolvents of a Π-isometric operator with unequal defect numbers, J. Funktsional. Anal. i Prilozhen. [Functional Anal. Appl.], Vol. 5, No 4 (1971), 73-75.

[9] H. Langer and P. Sorjonen, Verallgemeinerte Resolventen Hermitescher und Isometrischer Operatoren im Pontrjaginraum, Ann. Acad. Sci. Fenn. A1, 561 (1974), 3-45.

[10] H. Langer and B. Textorius, Generalized Resolvents of Dual Pairs of Contractions, in: Invariant Subspaces and Other Topics, 6th Oper. Theory Conf. Proc., 1982, 103-118.

[11] M. M. Malamud, On the formula of generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator, Ukr. Mat. Zhurnal, Vol. 44, No 2 (1992), 1658-1688.

[12] M. M. Malamud and V. I. Mogilevskii, On extensions of dual pairs of operators, Dokl. Akad. Nauk Ukr., no. 1 (1997), 30-37.

[13] M. M. Malamud and V. I. Mogilevskii, Krein type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations, Method of Funct. Anal. and Topology, Vol.8, No 4 (2002), 72-100.

[14] M. M. Malamud and V. I. Mogilevskii, Generalized resolvents of an isometric operator, Math. Notes, Vol.73, No 3 (2003), 460-466.

[15] B. Sz.-Nagy and Ch. Foias, Harmonic Analysis of Operators in Hilbert Space, Paris and Akad. Kiado, Budapest, 1967.

Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja 24, 83055 Donetsk, Ukraine

SOME EQUIVALENT QUASINORMS ON OPERATOR IDEALS

Nicolae Tiţa
Brasov University, Brasov, Romania

Some special quasi-norms on the s-number ideals $L_\phi(E,F)$, [5], [6], [11], are considered. The special case of the entropy numbers is also studied.

AMS subject classifications: 47B06, 47B10
Keywords: symmetric norming function, approximation numbers, s-number.

1. Introduction Let $T \in L(X)$ be a linear and bounded operator $T : X \to X$, where X is a Banach space. The sequence of the approximation numbers $(a_n(T))$ is defined as follows:

$$a_n(T) = inf\{||T - A|| : A \in L(X) \quad rank A < n\}, n = 1, 2 \ldots.$$

If X is a Hilbert space and $T \in L(X)$ is compact, the sequence $(a_n(T))$ coincides with the sequence $\{\lambda_n(TT^*)^{\frac{1}{2}}\}$, where $\lambda_n(T)$ is the sequence of the eigenvalues of T, ordered in a convenient way [2],[5],[11]. Are also other s-number sequences for an operator $T \in L(X)$, [10], [11]. For example the Kolmogorov numbers $d_n(T) = inf\{||Q_N^X T|| : N \subset X$ and $dim\, N < n,\}$ where Q_N^X is the canonical surjection from X onto X/N.

In the following by $(s_n(T))$ will be denoted an additive s - number sequence $(s_{2n-1}(S+T) \leq s_n(S) + s_n(T),\ \ n = 1, 2, \ldots)$. The approximation and the Kolmogorov numbers are additive. We recall that the sequence $(s_n(T))$ is such that $||T|| = s_1(T) \geq s_2 \geq \ldots \geq 0$. Let l_∞ be the space of all bounded real sequences. For $x \in l_\infty$, card(x) = card$\{i \in \mathcal{N} : x_i \neq 0\}$. Let $K \subset l_\infty$ be the set of all sequences x such that: card$(x) \leq n$ and $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$.

A function $\phi : K \to R$ is called symmetric norming function [2], [4], [5], [6], [11], if:

$$\phi > 0 \quad for \quad all \quad x \neq 0 \tag{1}$$

$$\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x), \quad x \in K, \alpha \geq 0 \tag{2}$$

$$\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y) \tag{3}$$

$$\phi(1, 0, 0, \ldots) = 1 \tag{4}$$

$$If \sum_1^k x_i \leq \sum_1^k y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, then \quad \phi(x) \leq \phi(y). \tag{5}$$

Example of such functions are

$$\phi_\infty(x) = x_1, \phi_1(x) = \sum_1^n x_i; \phi_\omega(x) = \sum_1^n \frac{x_i}{i},$$

[2],[5],[11]. It is known, [3], [11], that for all symmetric norming functions ϕ, the functions $\phi_{(p)} : (x_i) \in K \to (\Phi(\{x_i^p\}))^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$, are also symmetric norming functions.

If $x \in l_\infty$ and $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$, we take

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

By means of the symmetric norming function and the sequence $(s_n(T)$, the class $L_\phi(X)$ is defined [5], [10], as follows

$$L_\Phi(X) = \{T \in L(X) : \Phi(\{s_n(T)\}) < \infty\}.$$

Because $s_{2n-1}(T_1+T_2) \leq s_n(T_1)+s_n(T_2), n = 1, 2, \ldots$ and $s_n(\alpha T) = |\alpha|s_n(T), \alpha$ beeing a scalar, from the properties of the function ϕ, it results that $\parallel T \parallel_\phi = \Phi(\{s_n(T)\})$ is a quasi-norm.

We remark that, more generaly, $s_{m+n-1}(T_1+T_2) \leq s_n(T_1)+s_n(T_2)$, [3],[6],[11].

It is obvious that $\| T \|_\phi \geq 0$ and $\| \alpha T \|_\phi = |\alpha| \cdot \| T \|_\phi$. The relation $\| T_1+T_2 \|_\phi \leq 2(\| T_1 \|_\phi + \| T_2 \|_\phi$ results from the properties (2), (3), (5) of the functions ϕ and the fact that

$$\sum_1^k s_n(T_1+T_2) \leq 2\sum_1^k (s_n(T_1)+s_n(T_2)), k=1,2,\ldots.$$

The last inequality is a simple consequence of the relation $s_{2n-1}(T_1+T_2) \leq s_n(T_1)+s_n(T_2)$ since

$$\sum_1^k s_n(T_1+T_2) \leq \sum_1^{2k} s_n(T_1+T_2) = \sum_1^k s_{2n-1}(T_1+T_2) + \sum_1^k s_{2n}(T_1+T_2) \leq$$

$$\leq 2\sum_1^k s_{2n-1}(T_1+T_2).$$

If X is a Hilbert space, $\| T \|_\phi$ is a norm [2], [3], [6]. The study for the case of Banach spaces is made in [5], [10], [11]. In the following we present some equivalent quasinorms on $L_\phi(X)$.

2. Equivalent quasi-norms on $L_\phi(X)$

Firstly we present some well-known results,[6],[11]:

Proposition 1.1 *The quasi-norm* $\| T \|_\phi^+ = \Phi(\{s_{2n-1}(T)\})$ *is equivalent with* $\| T \|_\phi$.

The equivalence results from the fact that:

$$\sum_1^k s_{2n-1}(T) \leq \sum_1^k s_n(T) \leq 2\sum_1^k s_{2n-1}(T), k=1,2,\ldots; T \in L(X).$$

The left inequality is a consequence of the fact that $(s_n(T))$ is decreasing and the right inequality is presented above.

Proposition 1.2. *The quasinorm* $\| T \|_{\phi_{(p)}}$ *is a equivalent with* $\| T \|_{\phi_{(p)}}^\nabla = \phi_{(p)}\left(\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_i(T)\}\right)$, $1<p<\infty$.

This is a consequence of the Hardy's inequality, namely:

$$\sum_{n=1}^k s_n^p(T) \leq \sum_1^k \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_i(T)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^k s_n^p(T), \quad 1<p<\infty$$

and the properties of the functions Φ.

Now we generalize these results as follows:

Proposition 1.3 *The quasinorm* $\|T\|_\Phi^* = \Phi\left(s_{nk-(k-1)}(T)\right)$ *is equivalent with* $\|T\|_\Phi$, *for all* $k \geq 2$.

Proof. For $k=2$ we obtain proposition 1.1. For all $k \geq 3$, because $(s_n(T))$ is decreasing, we can write:

$$\sum_{n=1}^r s_{(n-1)k+1}(T) \leq \sum_1^r s_n(T) \leq \sum_{n=1}^{rk} s_n(T) =$$

$$= \sum_{n=1}^r \sum_{i=(n-1)k+1}^{nk} s_i(T) \leq k\sum_{n=1}^r s_{(n-1)k+1}(T), r=1,2,\ldots.$$

By using the properties (2) and (5) of the functions Φ, we obtain

$$\|T\|_\Phi^* \leq \|T\|_\Phi \leq k\|T\|_\Phi^*.$$

Theorem 1.4 *If the sequence* (α_n) *is such that* $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \ldots > 0$ *and* $\lim \alpha_n \neq 0$, *then the quasinorm* $\| T \|_{\phi_{(p)}}$ *is equivalent with* $\| T \|_{\phi_{(p)}}^\circ = \Phi_{(p)}\left(\{\frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(T)\}\right), 1<p<\infty.$

Proof. Since the sequences (α_i) and $(s_i(T))$ are decreasing it results that

$$\frac{1}{n\alpha_1} n\alpha_n s_n(T) = \frac{\alpha_n}{\alpha_1} s_n(T) \leq \frac{1}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(T) \leq \frac{1}{n\alpha_n} \alpha_1 \sum_{1}^{n} s_i(T).$$

If $\lim \alpha_i = \alpha \neq 0$ we obtain:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} s_n(T) \leq \frac{1}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(T) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i(T) \right).$$

From the Hardy's inequality we obtain:

$$\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} s_n(T) \right)^p \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(T) \right)^p \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} \right)^p \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i(T) \right)^p \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} \right)^p \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{1}^{k} s_n^p(T), \quad 1 < p < \infty.$$

From the properties of the functions Φ it results
$\frac{\alpha}{\alpha_1} \parallel T \parallel_{\phi(p)} \leq \parallel T \parallel^{\circ}_{\phi(p)} \leq \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{p}{p-1} \parallel T \parallel_{\phi(p)}$, i. e., $\parallel T \parallel_{\phi(p)}$ is equivalent with $\parallel T \parallel^{\circ}_{\phi(p)}$.
Remark. For the particular case, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, we obtain the proposition 1.2 and if Φ is Φ_1 : $(s_n(T)) \to \sum s_n(T)$ we obtain the results from [7].

The following result will be of great interest for applications. We remark that, for all ϕ, the function $\overline{\Phi} : (x_i) \in K \to \Phi(\{\epsilon_i x_i\})$ is also a symmetric norming function, if $1 = \epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \ldots \geq 0$, [11].

Theorem 1.3 *The quasi-norm* $\parallel \overline{T} \parallel_{\overline{\phi}} = \overline{\Phi}(\{s_{n^r}(T)\})$ *is equivalent with* $\parallel T \parallel_{\overline{\Phi}}$, $r \geq 2$ *if exists a constant c such that* $\epsilon_{n^r} \leq \frac{c}{n^{r-1}} \epsilon_n$, $\forall n \in N$.

Proof. Firstly we remark that

$$\sum_{1}^{k} \epsilon_n s_{n^r}(T) \leq \sum_{1}^{k} \epsilon_n s_n(T), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

because $(s_n(T))$ is decreasing.

Let now $j \in N$ such that $j^r \leq k < (j+1)^r$. Then we can write:

$$\sum_{1}^{k} \epsilon_n s_n(T) \leq \sum_{1}^{j} (2^r - 1) n^{r-1} \epsilon_{n^r} s_{n^r}(T) \leq c(2^r - 1) \sum_{1}^{k} \epsilon_n s_{n^r}(T).$$

From the properties (2), (5) of the functions ϕ, we obtain:

$$\Phi\left(\epsilon_n s_{n^r}(T)\right) \leq \Phi\left(\epsilon_n s_n(T)\right) \leq c(2^r - 1) \Phi\left(\epsilon_n s_{n^r}(T)\right).$$

Hence $\parallel \overline{T} \parallel_{\overline{\Phi}} \quad \leq \quad \parallel T \parallel_{\overline{\Phi}} \quad \leq \quad c(2^r - 1) \parallel \overline{T} \parallel_{\overline{\Phi}}$.

3. The special case of $L_{\infty,q,\gamma}(X)$ The class

$$L_{\infty,q,\gamma}(X) = \{T : \left(\sum_{1}^{\infty} [(1 + \log n)^{\gamma} s_n(T)]^q \cdot n^{-1} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty\}$$

has been studied in [2], [11], $0 < q < \infty, -\frac{1}{q} < \gamma < \infty$. It is simple to prove that

$$\parallel T \parallel_{\infty,q,\gamma} = \left(\sum_{1}^{\infty} [(1 + \log n)^{\gamma} s_n(T)]^q n^{-1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

is a quasi-norm on $L_{\infty,q,\gamma}(X)$.
Remark. If the sequence $\{(1+\log n)^{\alpha_q} \cdot n^{-1}\}$ is decreasing, the function

$$\tilde{\phi} : (s_n(T)) \to \left(\sum_1^{\infty} [(1+\log n)^{\gamma} s_n(T)]^q n^{-1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

is a symmetric norming function, $1 \leq q < \infty$, and hence the class $L_{\infty,q,\gamma}(X)$ is a special case of $L_{\phi}(X)$. For $\alpha = 0$ we obtain the class

$$L_{\phi_{\omega(q)}}(X) = \{T : \left(\sum_1^{\infty} \frac{s_n^q(T)}{n}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\}.$$

Here we present some quasi-norms equivalent with $\| T \|_{\infty,q,\gamma}$ for all $q, \gamma, \quad 0 < q < \infty, \quad -\frac{1}{q} < \gamma < \infty$.

Theorem 2.1 *The quasi-norm* $\| T \|^+_{\infty,q,\gamma} = (\sum [(1+logn)]^{\gamma} s_{n^k}(T)]^q \cdot n^{-1})^{\frac{1}{q}}$ *is equivalent with* $\| T \|_{\infty,q,\gamma}$.
Proof: Because $s_n(T)$ is decreasing it results that $\| T \|^+_{\infty,q,\gamma} \leq \| T \|_{\infty,q,\gamma}$.
On the other hand

$$\| T \|_{\infty,q,\gamma} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n^k}^{(n+1)^k-1} [(1+\log i)^{\gamma} s_i(T)]^q \, i^{-1}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_1^{\infty} (2^k-1) n^{k-1} [max\{\left(1+\log n^k\right)^{\gamma}, \left(1+\log (n+1)^k\right)^{\gamma}\} s_{n^k}(T)]^q \cdot n^{-k}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(2^k-1\right) \left(\sum_1^{\infty} c(\gamma,q,k)(1+\log n)^{\alpha q} s^q_{n^k}(T) \cdot n^{-1}\right)^{\frac{1}{q}} = \tilde{c}(\gamma,q,k) \, \| T \|^+_{\infty,q,\gamma} .$$

Hence

$$\| T \|^+_{\infty,q,\gamma} \leq \| T \|_{\infty,q,\gamma} \leq \tilde{c}(\gamma,q,k) \, \| T \|^+_{\infty,q,\gamma} .$$

Now we denote $\alpha_n(T) = s_{2^{n-1}}(T), n = 1, 2, \ldots$,[6], [10] and we consider the class

$$\tilde{L}_{r,q}(X) = \{T \in L(X) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{r}} \alpha_n(T)\right)^q \cdot n^{-1}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\},$$

with the quasi-norm

$$\| T \|^*_{r,q} = \left(\sum \left(n^{\frac{1}{r}} \alpha_n(T)\right)^q \cdot n^{-1}\right)^{\frac{1}{q}}, 0 < r, q < \infty.$$

Theorem 2.2 *The quasi-norm* $\| T \|^*_{r,q}$ *is equivalent with* $\| T \|_{\infty,q,\gamma}$ *if* $\gamma = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$.

Proof. We consider $\log_2 n$ and we obtain

$$\| T \|_{\infty,q,r} = \left(\sum_1^{\infty} [(1+\log n)^{\gamma} s_n(T)]^q \, n^{-1}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} [(1+\log k)^{\gamma} s_k(T)]^q \, k^{-1}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max\{(1+\log 2^{n-1})^{\gamma},(1+\log 2^{n})^{\gamma}\}\cdot s_{2^{n-1}}(T)\right)^{q}\cdot 2^{1-n}2^{n-1}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\max\{n^{\gamma},(n+1)^{\gamma}\}\cdot\alpha_{n}(T))^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c_1(\gamma,q)\left(\sum_{1}^{\infty}(n^{\gamma}\alpha_n(T))^{q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$c_1(\gamma,q)\left(\sum_{1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\alpha_n(T)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} = c_1(\gamma,q)\parallel T\parallel_{r,q}^{*}.$$

On the other hand

$$\parallel T\parallel_{\infty,q,\gamma}\geq\left(s_1^{q}(T)+\sum_{1}^{\infty}\left(\min\{\left(1+\log 2^{n-1}\right)^{\gamma},(1+\log 2^{n})^{\gamma}\}s_{2^{n}}(T)\right)^{q}\cdot 2^{-n}\cdot 2^{n-2}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(s_1^{q}(T)+\sum_{1}^{\infty}(\min\{n^{\gamma},(n+1)^{\gamma}\}\alpha_{n+1}(T))^{q}\cdot 2^{-2}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(\alpha_1^{q}(T)+\sum_{1}^{\infty}(\min\{n^{\gamma},(n+1)^{\gamma}\}\alpha_{n+1}(T))^{q}\,\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq c(\gamma,q)\parallel T\parallel_{r,q}^{*}.$$

Hence

$$c(\gamma,q)\parallel T\parallel_{r,q}^{*}\leq\parallel T\parallel_{\infty,q,\gamma}\leq c_1(\gamma,q)\parallel T\parallel_{r,q}^{*}.$$

Remark. If $\gamma=0$ it results $r=q$ and

$$\parallel T\parallel_{\infty,q}=\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{s_n^{q}(T)}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\sim\parallel T\parallel_{q}^{*}=\left(\sum\alpha_n^{q}(T)\right)^{\frac{1}{q}}$$

(see [6]).

4. Applications

If X and Y are normed spaces, and $(X,Y)_{\theta,p}$ is the interpolation space, [1], $(0<p<\infty,\ \theta\in(0,1)$, it is known [10] that the $\epsilon-$ entropy numbers verify the inequality:

$$\epsilon_{n^2}\left(T:(X,Y)_{\theta,p}\to A\right)\leq 4\epsilon_n(T_0:X\to A)^{1-\theta}\epsilon_n(T_1:Y\to A)^{\theta},$$

where A is an other normed space $(T=T_0+T_1.)$

By using the Hölder type inequality it results:

Proposition $L_{\overline{\Phi}_{(p_0)}}(X,A)\cap L_{\overline{\Phi}_{(p_1)}}(Y,A)\subset L_{\overline{\Phi}_{(p)}}\left((X,Y)_{\theta,p},A\right)$, for

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad 0<p_0<p_1<\infty,\quad \epsilon\in(o,\infty).$$

Proof. We recall that $L_{\overline{\Phi}_p}(X,Y)=\{T:\ \overline{\Phi}_{(p)}\left(\{(\epsilon_n(T))\}\right)\}$, where ϕ is a symmetric norming function and $\overline{\Phi}_{(p)}$ has been defined above.

Now, since $||T||_{\overline{\Phi}_{(p)}}\sim||\overline{T}||_{\overline{\Phi}_{(p)}}$, for $r=2$ (theorem 1.3), we obtain:

$$\overline{\Phi}_{(p)}\left(\{\epsilon_n(T:(X,Y)_{\theta,p}\to A))\sim\overline{\Phi}_p(\{\epsilon_{n^2}(T:(X,Y)_{\theta,p}\to A)\}\right)\leq$$

$$4\overline{\Phi}_{\left(\frac{p_0}{1-\theta}\right)}\left(\epsilon_n(T_0 : X \to A)^{1-\theta}\right)\overline{\Phi}_{\left(\frac{p_1}{\theta}\right)}\left(\epsilon_n(T_1 : Y - A)^{\theta}\right) =$$

$$4\overline{\Phi}_{(p_0)}\left(\epsilon_n(T_0 : X \to A)\right)^{1-\theta} \cdot \overline{\Phi}_{(p_1)}(\epsilon_n(T_1 : Y \to A))^{\theta} < \infty.$$

Remark. Recall that the entropy numbers $\epsilon_n(T)$ are defined as follows:

$$\epsilon_n(T) = \inf\{\sigma > 0 : \exists y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y : TU_X \epsilon \cup_{i=1}^{n} \{y_i + \sigma U_Y\}\},$$

where $T : X \to Y$ and $U_X = \{x \in X :\| x \|\leq 1\}$.

By means of these numbers it can define the ideals $L_{\overline{\Phi}_{(p)}}(X, Y)$, as above, only for the functions $\overline{\Phi}_{(p)}$, [10], [11], because the numbers $\epsilon_n(T)$ are not additive in the classical way.

References

[1] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer Verlag, 1976.

[2] I. Gohberg, M. Krein, *Introduction to the theory of non-selfadjoint operators*, A.M.S. Providence, 1969

[3] N. Salinas, *Symmetric norm ideals and relative conjugate ideals*, Trans. A. M.S. 188(1974) 213-240

[4] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Springer Verlag 1960

[5] N. Tita, *Operatori de clasă σ_p*, Studii cercet. Mat. 23(1971)467-487

[6] N. Tita, *On a class of $l_{\Phi,\phi}$ operators*, Collect. Mat. 32(1981)275-279

[7] N. Tita, *On Stoltz mappings*, Math. Japonica 26(1981)195-196

[8] N. Tita, *Approximation spaces and biliniar operators*, Studia Univ. Babes-Bolyai 35(1990)89-92

[9] N. Tita, *Some inequalities for the approximation numbers of tensor product operator*, Analele Univ. "Al. I.Cuza"Iasi, 40(1994)329-331

[10] N. Tita, *Ideale de operatori generate de s numere*, Ed. Univ. "Transilvania", Brasov, 1998.

[11] N. Tita, *Cvasinorme echivalente pe spaţii de aproximare*, Ed. Univ. "Transilvania", Braşov, 2001.

[12] N. Tita, *Equivalent quasinorms on some operator ideals*, Ann. Univ. Craiova, 28 (2001) 16 -23.

"Transilvania"University of Braşov
Faculty of Sciences
Department of Mathematics
2200 Brasov - ROMANIA
e-mail:n.tita@info.unitbv.ro

Section 2

EVOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Subsection 2.1

Differential-Operator and Evolution Equations

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЁННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА $2-\varepsilon$

А.В. Агибалова, Л.Л. Оридорога
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

Хорошо известно (см [5]), что система собственных и присоединённых функций (ССПФ) оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y. \tag{1}$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0 \tag{2}$$

полна в $L_2[0,1]$ при любом комплекснозначном потенциале $q \in L_1[0,1]$ и любых $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. Подобный результат имеет место (см. [5]) также для произвольных невырожденных граничных условий.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка $n > 2$ полнота ССПФ задачи с нерегулярными распадающимися граничными условиями впервые анонсирована М.В. Келдышем в [2], а доказана в работе А. А. Шкаликова [6]. В совместной работе М. М. Маламуда и одного из авторов [4] этот результат А. А. Шкаликова был распространен на случай уравнений произвольного дробного порядка $n-\varepsilon$, где $n \geq 3$.

В настоящей работе аналогичные результаты получены для дифференциального оператора дробного порядка $(2-\varepsilon)$ с распадающимися граничными условиями. Кроме того, исследовано асимптотическое поведение собственных значений такого оператора в случае нулевого потенциала. При этом, оказывается, что в отличие от уравнений целых порядков, собственные значения асимптотически приближаются не к лучам, а к некоторой кривой, для которой получено явное уравнение.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ дифференциальное уравнение дробного порядка $(2-\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$

$$y^{(2-\varepsilon)} + q(x)y^{(-\varepsilon)} = \lambda y, \tag{3}$$

с распадающимися краевыми условиями:

$$h y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0, \tag{4}$$

$$h_1 y^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + y^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$y^{(2-\varepsilon)} = \frac{d^2}{dx^2} J^{\varepsilon} y, \tag{6}$$

а J^{ε}—оператор дробного интегрирования:

$$J^{\varepsilon} y(x) \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\varepsilon-1} y(t)}{\Gamma(\varepsilon-1)}\, dt. \tag{7}$$

Рассмотрим вначале случай нулевого потенциала, т.е. уравнение вида

$$y^{(2-\varepsilon)} = \lambda y. \tag{8}$$

Это уравнение имеет следующую фундаментальную систему решений:

$$c(x,\lambda) = \Gamma(1-\varepsilon) x^{-\varepsilon} E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}\left(\lambda x^{2-\varepsilon}, 1-\varepsilon\right), \tag{9}$$

$$s(x,\lambda) = \Gamma(2-\varepsilon) x^{1-\varepsilon} E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}\left(\lambda x^{2-\varepsilon}, 2-\varepsilon\right), \tag{10}$$

удовлетворяющую начальным условиям:

$$\begin{cases} c^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = s^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1, \\ c^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = s^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $E_\rho(z;\mu)$—функция типа Миттаг-Леффлера, которая определяется степенным рядом

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\rho > 0), \tag{12}$$

где μ, вообще говоря, произвольный комплексный параметр. Хорошо известно (см.[1]), что $E_\rho(z;\mu)$—целая функция порядка ρ и типа 1,

Используя асимптотическое поведение функций типа Миттаг-Леффлера (см.[1]), выпишем асимптотику для функций $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$:

$$c(x,\lambda) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-4}}{|\lambda|^2}\right), \tag{13}$$

$$s(x,\lambda) = \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-3}}{|\lambda|^2}\right). \tag{14}$$

Используя оценки (13) и (14), докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $h_1 + h(\varepsilon - 1) + hh_1 \neq 0$. *Тогда собственные значения* λ_n *краевой задачи* (8), (4), (5) *асимптотически приближаются к кривой, описываемой уравнением*

$$\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}} e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} = \frac{2-\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-1)}(h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1), |\lambda| > \lambda_0. \tag{15}$$

При этом большие по модулю собственные значения λ_n *удовлетворяют асимптотике*

$$\operatorname{Im}\left(\lambda_n^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = R + 2\pi n - \operatorname{sgn}(n)\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon) + o(1), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

где

$$R = arg\left(\frac{h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $y(x,\lambda)$—общее решение уравнения (8), удовлетворяющее граничному условию (4), т.е.

$$y(x,\lambda) = c(x,\lambda) - hs(x,\lambda). \tag{18}$$

Для того чтобы λ было собственным значением необходимо и достаточно, чтобы $y(x,\lambda)$ удовлетворяло условию (4), т.е.

$$\chi(\lambda) = hs^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) - c^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) + h_1\left(hs^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) - c^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)\right) = 0. \tag{19}$$

Так же как и для уравнений целых порядков будем называть аналитическую функцию $\chi(\lambda)$ вида (19) характеристической функцией задачи (8), (4), (5). При этом собственные значения задачи (8), (4), (5) и только они являются нулями функции $\chi(\lambda)$.

Запишем асимптотические оценки для дробных производных функций $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ в точке $x = 1$:

$$c^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon} e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{20}$$

$$c^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}} e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{21}$$

$$s^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{22}$$

$$s^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon} e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{23}$$

Тогда характеристическая функция примет вид

$$\chi(\lambda) = \left(-\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + \frac{h\Gamma(2-\varepsilon) - h_1\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon} + \frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon} + \lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + \\ + \left(\frac{h_1\Gamma(1-\varepsilon) - h\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)} - \frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\right)\frac{1}{\lambda} + O\left(\tfrac{1}{|\lambda|^2}\right). \quad (24)$$

Для удобства записи обозначим

$$-\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon} = A, \qquad \frac{h\Gamma(2-\varepsilon) - h_1\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon} + \frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon} = B,$$
$$\frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon} = C, \qquad \frac{h_1\Gamma(1-\varepsilon) - h\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-1)} - \frac{hh_1\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} = D. \quad (25)$$

Теперь характеристическую функцию можно переписать в виде

$$\chi(\lambda) = \left(A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + B + C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + D\frac{1}{\lambda} + O\left(\tfrac{1}{|\lambda|^2}\right) = \\ = \left(A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + B + C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)\left(e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + \frac{D}{A}\lambda^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) + O\left(|\lambda|^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right). \quad (26)$$

Тогда, по теореме Руше, корни функции $\chi(\lambda)$ будут иметь такую же асимптотику как и корни уравнения

$$\left(A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + B + C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)\left(e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + \frac{D}{A}\lambda^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = 0. \quad (27)$$

Уравнение $A\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + B + C\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} = 0$ имеет конечное число корней, поэтому интерес представляют корни уравнения

$$e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + \frac{D}{A}\lambda^{-1-\frac{1}{2-\varepsilon}} = 0, \quad (28)$$

т.е.

$$\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} = -\frac{D}{A} = \frac{2-\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-1)}(h_1 - h + h\varepsilon + hh_1). \quad (29)$$

Обозначим через P число

$$P = |\frac{2-\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon-1)}(h_1 - h + h\varepsilon + hh_1)|, \quad P > 0. \quad (30)$$

Тогда

$$|e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}| = \frac{P}{|\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}|}. \quad (31)$$

Так как $|e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}| = e^{\mathrm{Re}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)}$ и $|\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}| = |\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|^{\frac{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}{\frac{1}{2-\varepsilon}}}$, то

$$e^{\mathrm{Re}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)} = \frac{P}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|^{\frac{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}{\frac{1}{2-\varepsilon}}}}. \quad (32)$$

Откуда

$$\frac{\mathrm{Re}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right)}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|} = \frac{\ln P}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|} - \frac{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}{\frac{1}{2-\varepsilon}}\frac{\ln|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|}{|\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|} \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty. \quad (33)$$

Следовательно,

$$arg\left(\lambda^{1+\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = (3-\varepsilon)arg\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) \to \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}})\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon), \quad |\lambda| \to +\infty. \quad (34)$$

Беря аргумент левой и правой частей равенства (29) получим, при достаточно больших значениях $|\lambda|$,

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}})\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon) = arg\left(\frac{h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\right) + 2\pi n + o(1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

Или

$$\operatorname{Im}\left(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\right) = arg\left(\frac{h_1 + h(\varepsilon-1) + hh_1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\right) + 2\pi n - \operatorname{sgn}(n)\frac{\pi}{2}(3-\varepsilon) + o(1), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{36}$$

Теорема доказана. □

Теперь, используя оценки (13) и (14), а также доказанное в [3] существование треугольного оператора преобразования для уравнения произвольного дробного порядка $n-\varepsilon$, докажем теорему о полноте ССПФ задачи (3), (4), (5).

Теорема 2. *Пусть $q(x)$ — аналитическая функция.*
Тогда ССПФ задачи (3), (4), (5) *полна в пространстве* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Приведем здесь лишь набросок доказательства теоремы.

Введём функккцию $\omega(x,\lambda)$—решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} \omega^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1, \\ \omega^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = -h. \end{cases} \tag{37}$$

Такая функция при всех λ удовлетворяет граничному условию (4). Поэтому λ будет собственным значением тогда и только тогда, когда

$$\chi(\lambda) = h_1\omega^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + \omega^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = 0. \tag{38}$$

При этом кратность нуля λ характеристической функции $\chi(\lambda)$ совпадает с кратностью собственного значения λ оператора (3), (4), (5).

Предположим, что функция $f(x)$ ортогональна ССПФ задачи (3), (4), (5). Рассмотрим скалярное произведение функций $f(x)$ и $\omega(x,\lambda)$:

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_0^1 f(x)\overline{\omega(x;\lambda)}\,dx. \tag{39}$$

Очевидно, что $\tilde{F}(\lambda)$—целая функция. Кроме того каждое собственное значение λ кратности p является нулём функции $\tilde{F}(\lambda)$ порядка не ниже p. Следовательно функция

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\chi(\lambda)} \tag{40}$$

является целой.

Известно (см [3]), что функция $\omega(x;\lambda)$ может быть получена с помощью оператора преобразования из функции $\omega_0(x;\lambda) = c(x,\lambda) - hs(x,\lambda)$—решения задачи Коши для уравнения (8) с начальными условиями

$$\begin{cases} \omega_0^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1, \\ \omega_0^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = -h, \end{cases} \tag{41}$$

т.е.

$$\omega(\lambda;x) = (I+K)\omega_0(x;\lambda) = \omega_0(x;\lambda) + \int_0^x K(x,t)\omega_0(t;\lambda)\,dt, \tag{42}$$

где K—вольтерров интегральный оператор.

Из формулы (42) и оценок (13) и (14) вытекает следующая оценка функции $\omega(\lambda;x)$ на мнимой оси:

$$\omega(\lambda;x) = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}(1+O(\tfrac{1}{|\lambda|}))+O(x^{-\varepsilon}). \tag{43}$$

Аналогично для $\chi(\lambda)$ получается оценка

$$\chi(\lambda) = -\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}(1+O(\tfrac{1}{|\lambda|})). \tag{44}$$

Из оценок (43) и (44) вытекает, что $F(\lambda)$—функция порядка не выше $2-\varepsilon$, а также что $F(\lambda)\to 0$ когда λ стремится к бесконечности по мнимой оси.

Тогда, по теореме Фрагмена–Линделёфа получаем, что $F(\lambda)\equiv 0$, а следовательно, и $\tilde{F}(\lambda)\equiv 0$. Но это означает, что $f(x)$ ортогональна $\omega(x;\lambda)$ при всех λ и, следовательно, $(I+K^*)f(x)=0$.

Но так как оператор K вольтерров, то оператор $I+K^*$ обратим и, значит, $f(x)=0$.

Таким образом, не существует ненулевой функции $f(x)$ ортогональной СПФ задачи (3), (4), (5), т.е. эта система функций полна. $\square$

Список литературы

[1] *Джарбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М. — Наука, 1966, 671С.

[2] *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений. — Доклады АН СССР. — 1951 — т. 87, №1, С. 11–14

[3] *Маламуд М. М.* Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков. — Труды Мос. мат. общества, 1994, т. 55, С. 73-148.

[4] *Malamud M. M., Oridoroga L. L.* Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential differential equations.— Russian Jour. of Math. Physics, 2001, vol. 8, №3, p. 287-308.

[5] *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. — Киев — "Наукова думка", 1977, 332С.

[6] *Шкаликов А.А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями// Функциональный анализ и его приложения. — 1976 — т. 10, №4, С. 69–80.

А.В. Агибалова, Л.Л. Оридорога, кафедра математического анализа и теории функций, математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк

E-mail: `oridoroga@skif.net`

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА N-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОСИНУС-ФУНКЦИЙ

В.М.Говоров
НТУУ «Киевский Политехнический Институт»
Киев, Украина

Настоящая работа посвящена n-параметрическим косинус-функциям, здесь изучаются некоторые их свойства без дополнительного предположения о четности по каждому из аргументов в отдельности, а также устанавливается связь между выражением для самой косинус-функции и ее покоординатными сужениями.

Keywords: косинус-функция, тождество Д'Аламбера.

Пусть X — банахово пространство, $L(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов над X.

Определение 1. n-параметрической косинус-функцией (КОФ) называется функция $C : \mathbb{R}^n \to L(X)$, удовлетворяющая слудующим условиям:

i) $C(\overline{0}) = I$.

ii) $C(\overline{t})$ сильно непрерывна в нуле: $\forall x \in X \quad \lim\limits_{t\to 0} C(\overline{t})x = x$.

iii) $C(\overline{t})$ удовлетворяет тождеству Д'Аламбера:

$$\forall\ \overline{t}, \overline{s} \in \mathbb{R}^n :\ C(\overline{t}+\overline{s}) + C(\overline{t}-\overline{s}) = 2C(\overline{t})C(\overline{s}). \tag{1}$$

Приведем примеры n-параметрических КОФ.

Пример 1.
Пусть $C(\overline{t})$ — произвольная однопараметрическая КОФ. Пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольный элемент $\mathbb{R}^n$, тогда функция $W(t_1, t_2, \ldots, t_n) = C(a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n)$ будет n-параметрической КОФ.

В простейшем случае, когда $X = \mathbb{R}$, примерами n-параметрической КОФ будут служить функции $\cos(a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n)$ и $\operatorname{ch}(a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n)$.

Пример 2.
Пусть $X = \mathbb{R}^3,\ n = 2$.

$$W_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}y^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $W_1(x,y)$ и $W_2(x,y)$ удовлетворяют тождеству Д'Аламбера. Выполнение условий i) и ii) очевидно.

Утверждение 1. Пусть $C(\overline{t})$ — n-параметрическая КОФ. Тогда $\exists M \geq 0$ и $C_0 \geq 0$, такие что

$$\forall\ \overline{t} \in \mathbb{R}^n :\ ||C(\overline{t})|| \leq Me^{C_0||\overline{t}||}. \tag{2}$$

Замечание.
В формулировке утверждения 1 не уточняется конкретный вид нормы, так как в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны.

Доказательство основано на идее ван дер Лина. Для случая $n = 1$ его можно найти в [4]. На n-мерный случай оно переносится без каких-либо существенных изменений.

Утверждение 2. n-параметрическая КОФ сильно непрерывна при всех значениях аргумента.

Доказательство для случая $n = 1$ можно найти в [4], которое также без существенных изменений переносится на n-мерный случай.

Рассмотрим вопросы диффферецируемости n-параметрической КОФ. Для случая $n = 1$ известно, что существует плотное подмножество X, на котором КОФ сильно дифференцируема при $\bar{t} = 0$. Для векторов этого множества она оказывается диффферецируемой и при всех остальных значениях $\bar{t}$ (доказательство можно найти в [4]). Для n-параметрической КОФ будем рассматривать множество $D_{\bar{t}}$, на котором КОФ дважды сильно дифференцируема как функция от n переменных в точке $\bar{t}$, пусть $D_2 = \bigcap\limits_{\bar{t}\in\mathbb{R}} D_{\bar{t}}$, т.е. в D_2 входят те векторы, на которых КОФ дважды сильно дифференцируема при всех значениях параметра $\bar{t}$.

Рассмотрим также множество $D := \{y_x(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(s,\bar{u})C(\bar{u})xd\bar{u} \mid x \in X, s \in \mathbb{R}\}$, где $\{K(s,\bar{u})\}$ — δ-образная последовательность.

Покажем, что $D \subseteq D_2$.

Для этого зафиксируем $\bar{t}$ и исследуем приращение КОФ в точке $\bar{t}$ на произвольном векторе $y_x(s)$ из D.

$$C(\bar{t}+\bar{h})y_x(s) - C(\bar{t})y_x(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t}+\bar{h})C(\bar{u})K(s,\bar{u})xd\bar{u} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t})C(\bar{u})K(s,\bar{u})xd\bar{u} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t}+\bar{h}+\bar{u})K(s,\bar{u})xd\bar{u} + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t}-\bar{h})K(s,\bar{u})xd\bar{u} -$$
$$- \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{t}+\bar{h})K(s,\bar{u})xd\bar{u} - \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})K(s,\bar{u})xd\bar{u} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})(K(s,\bar{u}-\bar{h}) - K(s,\bar{u}))xd\bar{u} + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})(K(s,\bar{u}+\bar{h}) - K(s,\bar{u}))xd\bar{u} =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})\left(\tfrac{\partial K}{\partial \bar{u}}(s,\bar{u}),\bar{h}\right)xd\bar{u} + \tfrac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})\left(\tfrac{\partial^2 K}{\partial \bar{u}^2}(s,\bar{u})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} -$$
$$- \tfrac{1}{12}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}+\bar{t})\left(\tfrac{\partial^3 K}{\partial \bar{u}^3}(s,\bar{u}-\theta\bar{h})(\bar{h})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})\left(\tfrac{\partial K}{\partial \bar{u}}(s,\bar{u}),\bar{h}\right)xd\bar{u} + \tfrac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})\left(\tfrac{\partial^2 K}{\partial \bar{u}^2}(s,\bar{u})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} +$$
$$+ \tfrac{1}{12}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u}-\bar{t})\left(\tfrac{\partial^3 K}{\partial \bar{u}^3}(s,\bar{u}+\eta\bar{h})(\bar{h})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u},\ \text{где } 0 \le \theta \le 1 \text{ и } 0 \le \eta \le 1.$$

Так как K и все её производные ограничены, а косинус-функция имеет оценку роста (2), то последнее выражение можно переписать в виде

$$\underline{\underline{O}}(||\bar{h}||) + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(\bar{u})C(\bar{t})\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \bar{u}^2}(s,\bar{u})\bar{h},\bar{h}\right)xd\bar{u} + \underline{\underline{O}}(||\bar{h}||^3).$$

Таким образом, видно, что КОФ дважды дифференцируема в точке $\bar{t}$ на векторах из D, более того, слагаемое, содержащее $\bar{h}$ во второй степени, непрерывно зависит от $\bar{t}$. Так как $\bar{t}$ выбиралось произвольно, то КОФ дважды сильно непрерывно дифференцируема на векторах из D при всех значениях параметра $\bar{t}$. Это означает, что $D \subseteq D_2$.

Теперь убедимся, что D плотно в X. Так как $K(s,\bar{u})$ — дельта-образная последовательность, то при $s \to 0\quad y_x(s) \to C(0)x = x$. Так как x выбиралось в X произвольно, то D плотно в X.

Поскольку D плотно в X и $D \subseteq D_2$, то D_2 также плотно в X. Этим мы доказали

Утверждение 3. $\overline{D}_2 = X$.

Введем следующие обозначения: $C_i(x_i) = C(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)$. Очевидно, что $C_i(x_i)$ — однопараметрическая КОФ. Функцию $S_i(x_i) = \int\limits_0^{x_i} C_i(s)ds$ принято называть однопараметрической синус-функцией, соответствующей $C_i(x_i)$, причем интеграл понимается в сильном смысле.

Лемма 1. Если $w : \mathbb{R} \to X,\ w$ — дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}w(t) &= Aw(t) \\ w(0) &= x \\ \frac{dw}{dt}(0) &= y, \end{cases} \tag{3}$$

где A – генератор некоторой однопараметрической КОФ $C(t)$, $x \in D(A)$, y – вектор, на котором $C(t)$ один раз сильно дифференцируема в нуле, $S(t)$ – соответствующая ей синус-функция, то w представима в виде

$$w(t) = C(t)\,x + S(t)\,y \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство можно найти в [5].

Утверждение 4. Если $u \in D_2$, то однопараметрическая косинус-функция $C_i(x_i)$ дважды сильно дифференцируема на векторе $C(y_1, y_2, \ldots, y_n)u$ и сильно дифференцируема один раз на векторе $\frac{\partial C}{\partial y_i}(y_1, y_2, \ldots, y_n)u \quad \forall\, y_1, \ldots, y_n, x_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

Из тождества Д'Аламбера нетрудно получить

$$C_i(x_i)C(y_1,\ldots,y_n)u = C(y_1,\ldots,y_n)C_i(x_i)u.$$

Так как $u \in D_2$, то $C_i(x_i)u$ дважды дифференцируема. Пользуясь непрерывностью $C(y_1,\ldots,y_n)$, внесём её под знак производной. Таким образом, правая часть равенства дважды дифференцируема по x_i, а, значит, и левая.

Для доказательства второй части утверждения заметим, что для $u \in D_2$ имеет смысл выражение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_i^2}(y_1,\ldots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\Big|_{y_i=z+x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_i^2}(y_1,\ldots,y_{i-1},y_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\Big|_{y_i=z-x_i}.$$

Преобразовывая его к виду

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(C(y_1,\ldots,y_{i-1},z+x_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(C(y_1,\ldots,y_{i-1},z-x_i,y_{i+1},\ldots,y_n)\,u\right)\right)$$

и пользуясь тождеством Д'Аламбера, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial z}\Big(C(0,\ldots,0,\underset{i\text{-я позиция}}{x_i},0,\ldots,0)C(y_1,\ldots,y_{i-1},z,y_{i+1},\ldots,y_n)u\Big) = \frac{\partial C_i(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}C(y_1,\ldots,y_n)u,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5. Для любого индекса $i = \overline{1,n}$ и любого вектора $u \in D$ функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C(x_1, x_2, \ldots, x_n)u$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}(\overline{0})f \\ f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) &= C(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)u \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) &= \frac{\partial C}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)\Big|_{x_i=0}. \end{cases}$$

Доказательство. Выполнение второго и третьего соотношений очевидно, для доказательства первого воспользуемся тождеством Д'Аламбера

$$C(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)u + C(x_1,\dots,x_{i-1},x_i-h,x_{i+1},\dots,x_n)u =$$

$$= 2C(0,\dots,0,\underbrace{h,}_{i\text{-я позиция}}0,\dots,0)C(x_1,\dots,x_n)u.$$

Пользуясь утверждением 4, продифференцируем обе части дважды по h и после этого положим $h=0$:

$$2\,\frac{\partial^2 C}{\partial\, x_i^2}(x_1,\dots,x_n)u = 2\,\frac{\partial^2 C}{\partial\, x_i^2}(\overline{0})C(x_1,\dots,x_n)u.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\, x_i^2}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^2 C}{\partial\, x_i^2}(\overline{0})f(x_1,\dots,x_n),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 6. Для любого индекса $i=\overline{1,n}$ и любого вектора $u\in X$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} C(x_1,\dots,x_n)u &= C_i(x_i)C(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)u+ \\ &+ S_i(x_i)\tfrac{\partial C}{\partial\, x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)u. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Выражение $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=C(x_1,x_2,\dots,x_n)u$ как функция переменной x_i при $u\in D_2$ благодаря утверждениям 4 и 5 удовлетворяет условиям леммы 1 с оператором $A=\frac{\partial^2 C}{\partial\, x_i^2}(\overline{0})$, поэтому представимо в виде

$$\begin{aligned} C(x_1,\dots,x_n)u &= C_i(x_i)C(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)u+ \\ &+ S_i(x_i)\tfrac{\partial C}{\partial\, x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)u. \end{aligned}$$

Поскольку оператор, стоящий в левой части, а также операторы, присутствующие в первом слагаемом правой части равенства, определены на всем X и ограничены, то оператор $S_i(x_i)\frac{\partial C}{\partial\, x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)u$ также определен на всем X и ограничен. Ввиду плотности D_2 последнее равенство может быть распространено на $\forall\, u\in X$, что и требовалось доказать.

Обозначение. Воспользуемся символической записью и перепишем правую часть равенства (4) в виде $\frac{\partial}{\partial\, x_i}\Big(S_i(x_i)C(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)u\Big)$, где следует понимать, что вначале производится дифференцирование, а затем в выражениях для C и всех ее производных полагается $x_i=0$.

Придерживаясь этой символической записи, получим, что $\forall u\in X$

$$C(x_1,\dots,x_n)u = \tfrac{\partial}{\partial\, x_1}\Big(S_1(x_1)C(0,x_2,\dots,x_n)u\Big) =$$

$$= \tfrac{\partial}{\partial\, x_1}\Big(S_1(x_1)\tfrac{\partial}{\partial\, x_2}\Big(S_2(x_2)\tfrac{\partial C}{\partial\, x_2}(0,0,x_3,\dots,x_n)u\Big)\Big) =$$

$$= \dots = \tfrac{\partial}{\partial\, x_1}\Big(S_1(x_1)\tfrac{\partial}{\partial\, x_2}\Big(S_2(x_2)\tfrac{\partial}{\partial\, x_3}\dots\tfrac{\partial}{\partial\, x_{n-1}}\Big(S_{n-1}(x_{n-1})\tfrac{\partial}{\partial\, x_n}\Big(S_n(x_n)C(\overline{0})u\Big)\Big)\dots\Big)\Big) =$$

$$= \tfrac{\partial^n}{\partial x_1\cdot\ldots\cdot\partial x_n}\Big(\prod_{i=1}^{n} S_i(x_i)C(\overline{0})u\Big).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. (Основная теорема).
$\forall u \in X$:

$$C(x_1, \ldots, x_n)u = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdot \ldots \cdot \partial x_n} \left(\prod_{i=1}^{n} S_i(x_i) C(\overline{0}) u \right).$$

Следствие 1. Для $n = 2$ полученная формула приобретает вид

$$C(x_1, x_2)u = C_1(x_1)C_2(x_2)u + S_1(x_1)S_2(x_2)\frac{\partial^2 C}{\partial\, x_1 \partial\, x_2}(0,0)u \quad \forall u \in X.$$

Следствие 2. Для $X = \mathbb{R}$, если в качестве КОФ взять $\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, полученная формула приводит к известной формуле тригонометрии для косинуса суммы.

Список литературы

[1] Goldstein J.A. On the convergence and approximation of cosine functions. Aeq. Math, 10 (1974), 201–205.
[2] Fattorini H.O. Second order differential equations in Banach spaces // North Holland. Amsterdam. — 1985.
[3] Kureppa S. A cosine functional equation in Hilbert space // Can J. Math. — 1960 — 12. p. 45–49.
[4] Sova M. Cosine operator functions, Warszawa, PWN, 1966, 47s. (Inst. matem.).
[5] Trevis C.C. Webb G.F. Cosine families and abstract non-linear second order differential equations. // Acta math. Acad. Sci Hung. — 1978. — 32., №3. — p. 75–96.

НТУУ "Киевский Политехнический Институт", Киев, пр. Победы, 37, Украина.

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ СЛАБО НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. П. Гуревич, А. П. Хромов
Саратовский государственный университет,
Саратов, Россия

В статье изучаются обыкновенные линейные дифференциальные операторы с суммируемыми коэффициентами и двухточечными краевыми условиями, обеспечивающими рост ядра резольвенты по спектральному параметру не выше степенного. Для таких операторов найдены достаточные условия на разлагаемую функцию, при которых имеет место равномерная сходимость на любом отрезке, лежащем внутри основного интервала, обобщенных средних Рисса по собственным и присоединенным функциям. Установлена также равносходимость таких средних для двух произвольных операторов рассматриваемого вида, имеющих одинаковый порядок.

Keywords: суммируемость по Риссу, дифференциальный оператор, резольвента оператора, собственные функции

1. Введение

Пусть L – оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1],\ p_k(x) \in L[0,1],$$

и нормированными ([2], c.66) краевыми условиями

$$U_j(y) = U_j^0(y) + U_j^1(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $U_j^0(y) = \sum\limits_{k=0}^{\sigma_j} a_{jk}y^{(k)}(0), \quad U_j^1(y) = \sum\limits_{k=0}^{\sigma_j} b_{jk}y^{(k)}(1),$

$|a_{j\sigma_j}| + |b_{j\sigma_j}| > 0,\ n-1 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0,\ \sigma_j > \sigma_{j+2}.$

Средние Рисса порядка γ ($\gamma > 0$) разложений по собственным и присоединенным функциям оператора L представляют собой интегралы

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^{\gamma} R_\lambda f \, d\lambda,$$

где R_λ – резольвента оператора L, а контур $|\lambda| = r$ не проходит через собственные значения.

Если краевые условия регулярны ([2], c.66-67), то М.Стоун показал [6], что имеет место равносуммируемость на любом отрезке из $(0,1)$ таких средних и аналогичных средних для обычного тригонометрического ряда Фурье произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$. Полное решение вопроса о равномерной сходимости на всем отрезке $[0,1]$ средних Рисса для таких операторов дано в [4], [5], причем в [5] исследуется и сходимость средних в пространстве $C^k[0,1]$, $k = 1,2,\ldots,n-1$. Регулярность краевых условий приводит к тому, что ядро $G(x,t,\lambda)$ резольвенты R_λ имеет при больших $|\lambda|$ оценку $O\left(|\lambda|^{\frac{1-n}{n}}\right)$ [1]. В настоящей статье изучаются такие дифференциальные операторы, для которых у $G(x,t,\lambda)$ допускается любая степенная оценка.

Дадим точное описание рассматриваемого класса операторов. Пусть $\lambda = -\rho^n$ и $\rho \in S = \left\{\rho \mid 0 \leq \arg\rho \leq \frac{2\pi}{n}\right\}$. Обозначим через S_j, $j = 1,2,3,4$ секторы в ρ-плоскости: $S_j =$

[1]Следует иметь в виду, что это наименьшая из возможных оценок.

$\left\{\rho \mid \frac{\pi}{2n}(j-1) \le \arg\rho \le \frac{\pi}{2n}j\right\}$. Очевидно, что $S = \bigcup\limits_{j=1}^{4} S_j$. Известно ([2], с.58-59), что в каждом из секторов $S_1 \cup S_2$ и $S_3 \cup S_4$ уравнение $l[y] + \rho^n y = 0$ имеет фундаментальную систему решений $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$, которая при больших $|\rho|$ допускает следующее асимптотическое представление:

$$\frac{d^m y_k(x,\rho)}{dx^m} = (\rho\omega_k)^m[1]\exp\rho\omega_k x, \quad m = 0,1,\ldots,n-1,$$

где $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ – различные корни n-ой степени из -1, занумерованные так, что выполняются неравенства $\mathrm{Re}\,\rho\omega_1 \ge \mathrm{Re}\,\rho\omega_2 \ge \ldots \ge \mathrm{Re}\,\rho\omega_n$ (нумерация ω_k зависит от сектора), $[a] = a + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Обозначим $U_j(y_k) = A_{jk} + B_{jk}\exp\rho\omega_k$.

Характеристический определитель

$$\Delta(\rho) = \det(U_j(y_k)) = \begin{vmatrix} A_{11} + B_{11}e^{\rho\omega_1} & \ldots & A_{1n} + B_{1n}e^{\rho\omega_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_{n1} + B_{n1}e^{\rho\omega_1} & \ldots & A_{nn} + B_{nn}e^{\rho\omega_n} \end{vmatrix}$$

разложим очевидным образом в сумму, каждое слагаемое которой представляет собой определитель, составленный из A_{jk} и B_{jk}, умноженный на экспоненту вида $\exp\rho(\omega_{j_1} + \ldots + \omega_{j_s})$. Пусть число ν определяется из условия: при $\rho \in S_j$ выполняется $\mathrm{Re}\,\rho\omega_\nu \ge 0 \ge \mathrm{Re}\,\rho\omega_{\nu+1}$. Очевидно, ν зависит от выбора S_j. Всюду в дальнейшем будем считать, что $n = 4n_0 + 1$, $n_0 = 1, 2, \ldots$. Остальные случаи исследуются аналогично.

Обозначим через P_0, P_1 $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1)$ определители в разложении $\Delta(\rho)$, стоящие при $\exp\rho\left(\sum\limits_{k=1}^{\nu}\omega_k\right)$ и $\exp\rho\left(\sum\limits_{k=1}^{\nu+1}\omega_k\right)$ соответственно, при условии, что число ν выбрано в предположении $\rho \in S_1$ $(\rho \in S_3)$. Предположим, что выполняется условие: существуют вещественные α_1, β_1, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\beta}_1$ такие, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho\to\infty}\frac{P_0}{\rho^{\alpha_1}} \ne 0, \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{P_1}{\rho^{\beta_1}} \ne 0, \quad \rho \in S_1 \cup S_2, \\ &\lim_{\rho\to\infty}\frac{\tilde{P}_0}{\rho^{\tilde{\alpha}_1}} \ne 0, \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{\tilde{P}_1}{\rho^{\tilde{\beta}_1}} \ne 0, \quad \rho \in S_3 \cup S_4. \end{aligned} \tag{2}$$

В [3] показано, что краевые условия (1) будут регулярны, тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1 = \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_1 = \sigma$, где $\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j$. Операторы с условием (2) при произвольных вещественных α_1, β_1, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\beta}_1$ и представляют собой рассматриваемый класс слабо нерегулярных операторов.

В настоящей статье изучаются обобщенные средние Рисса следующего вида $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda$, где $g(\lambda,r)$ удовлетворяет условиям ([1]):

а) при любом $r > 0$ $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$;

б) существует такая константа C, что при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$ выполняется неравенство $|g(\lambda,r)| \le C$;

в) существуют положительные γ и h такие, что

$$g(r\exp i\varphi, r) = \begin{cases} O(|\varphi|^\gamma),\ |\varphi| \le h, & \text{если } n = 4n_0 \\ O(|\varphi - \pi|^\gamma),\ |\varphi - \pi| \le h, & \text{если } n = 4n_0 + 2 \\ O\left(\left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right|^\gamma\right),\ \left|\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right| \le h, & \text{если } n \text{ – нечетное} \end{cases}$$

(оценки равномерные по r);

г) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C[0,1]$ *и удовлетворяет тем краевым условиям из* (1), *которые не содержат производных. Тогда при положительном* γ *таком, что* $\gamma \geq \sigma - \alpha$, *где* $\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1\}$, *и* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f \, d\lambda \right\|_{C[h,1-h]} = 0, \tag{3}$$

где r *такие, что на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* L.

Отметим, что вопрос о том, можно ли в (3) положить $h = 0$, остается открытым.

Пусть L' – другой оператор рассматриваемого вида с параметрами α_1', β_1', $\tilde{\alpha}_1'$, $\tilde{\beta}_1'$, $\sigma' = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j'$, $\alpha' = \min\{\alpha_1', \beta_1', \tilde{\alpha}_1', \tilde{\beta}_1'\}$ и R_λ' – его резольвента.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \geq \max\{\sigma - \alpha, \sigma' - \alpha'\}$ $(\gamma > 0)$. *Тогда для любой* $f(x) \in L[0,1]$ *и любого* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)(R_\lambda f - R_\lambda' f) \, d\lambda \right\|_{C[h,1-h]} = 0. \tag{4}$$

Для $g(\lambda, r) = \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma$ этот результат без доказательства содержится в [3].

2. Асимптотика $G(x,t,\lambda)$ при больших $|\lambda|$

Известно ([2], с.46), что $R_\lambda f = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) \, dt$, где функция Грина $G(x,t,\lambda) = \dfrac{H(x,t,\rho)}{2W(x,\rho)\Delta(\rho)}$, $W(x,\rho)$ – определитель Вронского системы $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$,

$$H(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} g(x,t,\rho) & y_1(x,\rho) & \dots & y_n(x,\rho) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(g) & U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \quad g(x,t,\rho) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x,\rho) W_i(t,\rho), & t \leq x \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x,\rho) W_i(t,\rho), & t \geq x, \end{cases}$$

$W_i(x,\rho)$ – алгебраическое дополнение элемента $y_i^{(n-1)}(x,\rho)$ определителя $W(x,\rho)$, $U_j(g)$ – результат применения U_j к $g(x,t,\rho)$ как функции x.

Пусть

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

и Ω_i – алгебраическое дополнение элемента ω_i^{n-1} определителя Ω.

Обозначим, далее, $\sum\limits_i{}' = \sum\limits_{\operatorname{Re}\rho\omega_i \geq 0}$, $\sum\limits_i{}'' = \sum\limits_{\operatorname{Re}\rho\omega_i \leq 0}$, $\sum\limits_i{}'\omega_i = \omega_0$.

Лемма 1. *Пусть* h *– произвольное фиксированное число из интервала* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Тогда в области* $\{0 \leq t \leq 1,\ h \leq x \leq 1-h\}$ *и больших* $|\rho|$ *справедливы асимптотические формулы: если* $t \leq x$, *то*

$$H(x,t,\rho) = 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \left\{ \sum_i{}'' \Omega_i[1] P_0 \exp \rho\omega_i(x-t) + O(\rho^\sigma \exp \rho\omega_{\nu+1} h) \right\} \exp \rho\omega_0, \ \rho \in S_1, \tag{5}$$

$$H(x,t,\rho) = 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \left\{ \sum_i{}'' \Omega_i[1] P_1 \exp \rho\omega_i(x-t) + O(\rho^\sigma \exp(-\rho\omega_\nu h)) \right\} \exp \rho\omega_0, \ \ \rho \in S_2.$$

Формула для $H(x,t,\rho)$ при $\rho \in S_3$ получается из последней формулы заменой P_1 на $\tilde{P}_1$, а при $\rho \in S_4$ получается из (5) заменой P_0 на $\tilde{P}_0$. Формулы для $H(x,t,\rho)$ при $t \geq x$ получаются из соответствующих формул при $t \leq x$ путем замены $\sum\limits_i{}''$ на $-\sum\limits_i{}'$.

Доказательство. Проведем доказательство лишь для случая $\rho \in S_1$, так как в других случаях оно совершенно аналогично. При больших $|\rho|$ имеем

$$W(x,\rho) = \Omega\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}[1], \quad W_j(t,\rho) = \Omega_j \rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}[1] \exp(-\rho\omega_i t).$$

Далее, так как каждый элемент первого столбца определителя $H(x,t,\rho)$ равен сумме n слагаемых, то, представив $H(x,t,\rho)$ в виде суммы n слагаемых, после несложных преобразований придем к

$$H(x,t,\rho) = 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \sum_{i=1}^{n} \Omega_i[1] M_i(x,\rho) \exp(-\rho\omega_i t), \quad t \leq x,$$
$$H(x,t,\rho) = 2\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \sum_{i=1}^{n} \Omega_i[1] N_i(x,\rho) \exp(-\rho\omega_i t), \quad t \geq x,$$

где

$$M_i(x,\rho) = \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_i x}[1] & e^{\rho\omega_1 x}[1] & \dots & e^{\rho\omega_{i-1} x}[1] & 0 & e^{\rho\omega_{i+1} x}[1] & \dots & e^{\rho\omega_n x}[1] \\ B_{1i}e^{\rho\omega_i} & A_{11} + B_{11}e^{\rho\omega_1} & \dots & A_{1,i-1} + B_{1,i-1}e^{\rho\omega_{i-1}} & A_{1i} & A_{1,i+1} + B_{1,i+1}e^{\rho\omega_{i+1}} & \dots & A_{1n} + B_{1n}e^{\rho\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{ni}e^{\rho\omega_i} & A_{n1} + B_{n1}e^{\rho\omega_1} & \dots & A_{n,i-1} + B_{n,i-1}e^{\rho\omega_{i-1}} & A_{ni} & A_{n,i+1} + B_{n,i+1}e^{\rho\omega_{i+1}} & \dots & A_{nn} + B_{nn}e^{\rho\omega_n} \end{vmatrix}.$$

Определитель $N_i(x,\rho)$ отличается от $M_i(x,\rho)$ лишь двумя элементами: в первой строке и первом столбце у него стоит 0, а в первой строке и $(i+1)$-м столбце стоит $e^{\rho\omega_i x}[1]$. Если $\operatorname{Re}\rho\omega_i \leq 0$, то в определителе $M_i(x,\rho)$ выносим из второго столбца $e^{\rho\omega_1}$, из третьего – $e^{\rho\omega_2}$ и т.д., из $(\nu+1)$-го – $e^{\rho\omega_\nu}$, затем разлагаем полученный определитель по элементам первого столбца, и, учитывая, что функции $e^{\rho\omega_1(x-1)}, \dots, e^{\rho\omega_\nu(x-1)}, e^{\rho\omega_{\nu+2}x}, \dots, e^{\rho\omega_n x}$ при $x \in [h, 1-h]$ экспоненциально убывают, придем к представлению

$$M_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \left\{ [1] \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1\nu} & A_{1,\nu+1} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{n\nu} & A_{n,\nu+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \exp\rho\omega_i(x-t) + \gamma(\rho) \right\} \exp\rho\omega_0,$$

где через $\gamma(\rho)$ здесь и в дальнейшем обозначается функция, имеющая оценку $O(\rho^\sigma \exp \rho\omega_{\nu+1}h)$. Отсюда

$$M_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \{P_0[1]\exp\rho\omega_i(x-t) + \gamma(\rho)\}\exp\rho\omega_0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что при $t \geq x$

$$N_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \gamma(\rho)\exp\rho\omega_0.$$

Если же $\operatorname{Re}\rho\omega_i \geq 0$, то придем к следующим асимптотическим представлениям: $M_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \gamma(\rho)\exp\rho\omega_0$ при $t \leq x$, $N_i(x,\rho)\exp(-\rho\omega_i t) = \{-P_0[1]\exp\rho\omega_i(t-x) + \gamma(\rho)\}\exp\rho\omega_0$ при $t \geq x$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Если функция $M(x,\rho)$ равномерно ограничена при всех $x \in [h, 1-h]$ и всех $\rho \in S_1$, то*

$$\int\limits_{C_r} \rho^k g(-\rho^n, r^n) M(x,\rho) \exp \rho\omega_{\nu+1} h \, d\rho = O(r^{k-\gamma}),$$

где C_r – дуга окружности $|\rho| = r$, лежащая в секторе S_1.

Это утверждение при $g(\lambda, r) = \left(1 - \dfrac{\lambda^4}{r^4}\right)^\gamma$ принадлежит М.Стоуну [6], и доказательство в нашем случае полностью сохраняется.

Обозначим через S_δ область, получающуюся из сектора S после удаления всех чисел $\rho_k = (-\lambda_k)^{1/n}$ (λ_k – собственные значения оператора L) вместе с их круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ. Получим для $|\Delta(\rho)|$ оценку снизу в области S_δ. Остановимся лишь на случае $\rho \in S_{1,\delta} = S_1 \cap S_\delta$, так как в остальных случаях рассуждения аналогичны.

В силу (2) имеем

$$\Delta(\rho) = (P_0 + P_1 \exp \rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)) \exp \rho\omega_0 = b\rho^{\alpha_1}\{1 + (a + o(1))\rho^{\beta_1 - \alpha_1} \exp \rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)\} \exp \rho\omega_0, \tag{6}$$

где a и b – константы, отличные от нуля, $\tilde{o}(1)$ экспоненциально стремится к нулю при $|\rho| \to \infty$.

Лемма 3. *Функция $z(\rho) = \rho\omega_{\nu+1} + \beta \ln \rho$ отображает взаимно однозначно область $\{\rho \mid \rho \in S_1, \ |\rho| \geq \rho_0\}$ на область, содержащую полуполосу произвольной ширины, осью которой является луч $arg\rho = \frac{3\pi}{2}$. Здесь $\beta > 0$, ρ_0 – достаточно большое положительное число.*

Доказательство. Взаимная однозначность отображения при $|\rho|$ достаточно больших очевидна, поэтому остановимся на доказательстве заключительного утверждения леммы. С этой целью рассмотрим образы лучей $\rho = x$ и $\rho = x \exp \frac{\pi}{2n} i$ при $x \geq \rho_0$. Имеем

$$z(x) = x \sin \frac{\pi}{2n} + \beta \ln x - ix \sin \frac{\pi}{2n},$$

$$z(x \exp \frac{\pi}{2n} i) = \beta \ln x - i\Big(x - \frac{\pi}{2n}\Big).$$

Значит, при $x \to +\infty$ функции $\operatorname{Re} z(x)$, $\operatorname{Im} z(x)$, $\operatorname{Im} z\Big(x \exp \dfrac{\pi}{2n} i\Big)$ стремятся к $-\infty$, а $\operatorname{Re} z\Big(x \exp \dfrac{\pi}{2n} i\Big) \to +\infty$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *При $\rho \in S_{1,\delta}$ и достаточно больших по модулю справедлива оценка*

$$|\Delta(\rho)| \geq C|\rho|^{\alpha_1} |\exp \rho\omega_0|. \tag{7}$$

Доказательство. Если $\beta = \beta_1 - \alpha_1 \leq 0$, то оценка (7) получается из (6), как и в [2], с.78-79. Если $\beta > 0$, то, положив $z = \rho\omega_{\nu+1} + \beta \ln \rho$, получим

$$1 + a\rho^\beta \exp \rho\omega_{\nu+1} = 1 + ae^z,$$

и, используя лемму 3, оценим функцию $1 + ae^z$ снизу как и в [2]. В итоге из (6) получаем оценку (7). Лемма доказана. □

Лемма 5. *При $\rho \in S_{1,\delta}$ имеет место асимптотическое представление*

$$\frac{P_0}{\Delta(\rho)} = \{1 + O(\rho^{\beta_1 - \alpha_1} \exp \rho\omega_{\nu+1}) + \tilde{o}(1)\} \exp(-\rho\omega_0).$$

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\frac{P_0}{\Delta(\rho)} = \left\{1 - \frac{P_1 \exp\rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)}{P_0 + P_1 \exp\rho\omega_{\nu+1} + \tilde{o}(1)}\right\} \exp(-\rho\omega_0),$$

и требуемое утверждение следует из леммы 4. □

Теорема 3. *В области* $\{0 \le t \le 1,\ h \le x \le 1-h\}$, *где* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, *справедливы асимптотические формулы: при* $\rho \in S_{1,\delta}$, $\rho \in S_{4,\delta}$

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Omega\rho^{n-1}} \sum_i{}'' \Omega_i[1] \exp\rho\omega_i(x-t) + O(\rho^{\sigma-n+1-\alpha} \exp\rho\omega_{\nu+1} h) + \tilde{o}(1), \quad t \le x \tag{8}$$

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{1}{\Omega\rho^{n-1}} \sum_i{}' \Omega_i[1] \exp\rho\omega_i(x-t) + O(\rho^{\sigma-n+1-\alpha} \exp\rho\omega_{\nu+1} h) + \tilde{o}(1), \quad x \le t \tag{9}$$

при $\rho \in S_{2,\delta}$ *и* $\rho \in S_{3,\delta}$ *формулы для* $G(x,t,\lambda)$ *получаются из* (8), (9) *заменой* $\exp\rho\omega_{\nu+1}h$ *на* $\exp(-\rho\omega_\nu h)$.

При $\rho \in S_{1,\delta}$ формулы (8), (9) следуют из лемм 1, 4, 5. В остальных случаях они получаются аналогично.

3. Доказательство теоремы 1

В [1] получена формула:

$$f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r) R_\lambda f\, d\lambda = f_0(x)(1 - g(\mu,r)) + f(x) - f_0(x) + I_{1r} + I_{2r}, \tag{10}$$

где $f_0(x) \in C^n[0,1]$ и $U_j(f_0) = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$; $f_1 = l[f_0] - \mu f_0$, μ – произвольное фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L и лежащее внутри окружности $|\lambda| = r$,

$$I_{1r} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu} R_\lambda f_1\, d\lambda, \quad I_{2r} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r) R_\lambda (f - f_0) d\lambda.$$

Покажем, что правая часть (10) при больших r сколь угодно мала. Имеем очевидные оценки при $\rho \in S_1$:

$$\int\limits_0^x |f(t)|\, |\exp\rho\omega_i(x-t)| dt = O(æ(\rho)\|f\|), \quad i = \nu+1,\ldots,n, \tag{11}$$

$$\int\limits_x^1 |f(t)|\, |\exp\rho\omega_i(x-t)| dt = O(æ(\rho)\|f\|), \quad i = 1,\ldots,\nu, \tag{12}$$

где $æ(\rho) = \dfrac{1}{-\operatorname{Re}\rho\omega_{\nu+1}}(1 - \exp\operatorname{Re}\rho\omega_{\nu+1})$, $\|f\| = \|f\|_{C[0,1]}$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $f_0(x)$ так, чтобы $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Далее, выберем $r_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $r \ge r_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\|f_0\|\, |1 - g(\mu,r)| < \varepsilon$. Рассмотрим теперь I_{1r}. Произведем замену $\lambda = -\rho^n$, $0 \le \arg\rho \le \dfrac{2\pi}{n}$. В результате получим $I_{1r} = \sum\limits_{j=1}^{4} I_{1r}(j)$, где $I_{1r}(j) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{C_{rj}} \frac{g(-\rho^n,r)}{-\rho^n-\mu} R_\lambda f_1 n\rho^{n-1} d\rho$, $C_{rj} = \{\rho|\ |\rho| = \sqrt[n]{r},\ \rho \in S_j\}$.

Оценим $I_{1r}(1)$. Для $j = 2,3,4$ рассуждения аналогичны.

По теореме 3 имеем:

$$G(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right) + O(\rho^{\sigma-n+1-\alpha}\exp\rho\omega_{\nu+1}h) + \tilde{o}(1).$$

Поэтому

$$I_{1r}(1) = O\left(\frac{1}{r^{\frac{n-1}{n}}}\right) + O\left(\int\limits_{C_{r1}} |g(-\rho^n, r)\rho^{\sigma-\alpha-n}\exp\rho\omega_{\nu+1}h|\,|d\rho|\right) + \tilde{o}(1).$$

Тогда по лемме 2 получим $I_{1r}(1) = O\Big(r^{\frac{1-n}{n}}\Big)$. Следовательно, $I_{1r} = O\Big(r^{\frac{1-n}{n}}\Big)$.

Оценим теперь $I_{2r} = \sum\limits_{j=1}^{4} I_{2r}(j)$. По теореме 3 в силу (11) и (12) имеем:

$$I_{2r}(1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r1}} g(-\rho^n, r)R_\lambda(f-f_0)n\rho^{n-1}d\rho =$$

$$= O\left(\|f-f_0\|\int\limits_{C_{r1}} |g(-\rho^n, r)\text{æ}(\rho)|\,|d\rho|\right) + \tag{13}$$

$$+O\left(\|f-f_0\|\int\limits_{C_{r1}} |g(-\rho^n, r)\rho^{\sigma-\alpha}\exp\rho\omega_{\nu+1}h|\,|d\rho|\right) + \tilde{o}(1)\|f-f_0\|.$$

В первом интеграле, стоящем в правой части (13), сделаем замену $\rho = |\rho|\exp\left(\dfrac{\pi}{2n} - \Theta\right)i$, а затем воспользуемся условием в).

В результате получим

$$\int\limits_{C_{r1}} |g(-\rho^n, r)\text{æ}(\rho)|\,|d\rho| = O\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \Theta^\gamma \frac{1-e^{-r^{\frac{1}{n}}\sin\Theta}}{\sin\Theta}d\Theta\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{r^{\frac{\gamma}{n}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}r^{\frac{1}{n}}} \xi^\gamma\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}d\xi\right) = O(1).$$

Второй интеграл в (13) по лемме 2 имеет оценку $O(1)$. Значит, $I_{2r}(1) = O(\|f-f_0\|)$. Проводя аналогичные рассуждения для $I_{2r}(j)$, $j = 2,3,4$, заключаем, что $I_{2r} = O(\|f-f_0\|)$.

Теорема 1 доказана.□

4. Доказательство теоремы 2

По теореме 3 имеем при $x \in [h, 1-h]$ и $\rho \in S_{1,\delta}$

$$G(x,t,\lambda) - G'(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right) + O(\rho^{\sigma-\alpha-n+1}\exp\rho\omega_{\nu+1}h),$$

где $G'(x,t,\lambda)$ – ядро R'_λ. Отсюда по лемме 2 (см. доказательство теоремы 1) получаем

$$\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)[G(x,t,\lambda) - G'(x,t,\lambda)]d\lambda = O(1). \tag{14}$$

Пусть D – множество функций из $C^n[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям операторов L и L'. Тогда D всюду плотно в $L[0,1]$. Пусть μ не является собственным значением операторов L и L'. Тогда для $f(x)\in D$

$$\frac{f(x)}{\lambda-\mu}+R_\lambda f=\frac{R_\lambda f_1}{\lambda-\mu},\quad \frac{f(x)}{\lambda-\mu}+R'_\lambda f=\frac{R'_\lambda f_2}{\lambda-\mu},$$

где $f_1=l[f]-\mu f$; $f_2=l'[f]-\mu f$ и $l'[f]$ – дифференциальное выражение для оператора L'. Поэтому для $f\in D$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)[R_\lambda f-R'_\lambda f]d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu}R_\lambda f_1\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu}R'_\lambda f_2\,d\lambda. \quad (15)$$

Интегралы в правой части (15) , как показано при доказательстве теоремы 1, есть $O\left(r^{\frac{1-n}{n}}\right)$. Значит, (4) справедливо для $f(x)\in D$. А в силу (14) по теореме Банаха-Штейнгауза оно имеет место для любой $f(x)\in L[0,1]$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Гуревич А.П., Хромов А.П. *О суммируемости по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов в пространстве* $C^\alpha[0,1]$// ДАН, 2002, **386**, № 5, С. 589-592.

[2] Наймарк М.А, *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1968.

[3] Хромов А.П., *Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале* // ДАН СССР. 1962, **146**. – С. 1294-1297.

[4] Freiling G., Kaufman F.-J., *On uniform and* L_p*-convergence of eigenfunction expansions for indefinite eigenvalue problems* // Integral Equations Operator Theory. – 13(1990). – no 2. – P. 193-215.

[5] Kaufman F.-J., *Derived Birkhoff-series associated with* $N(Y)=\lambda P(Y)$ // Results in Math. – 1989. – V. 15. – P. 255-290.

[6] Stone M.H., *A comparison of the series of Fourier and Birkhoff* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – V.28. – № 4. – P. 695-761.

А.П. Гуревич, Механико-математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

А.П. Хромов, Механико-математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

A.P. Gurevich, A.P. Khromov *Riesz summability of the spectral expansions of weakly nonregular boundary problems*

This paper contains the study of ordinary linear differential operators with summable coefficients and two-point boundary conditions which provide at most power growth of the resolvent's kernal as a function of the spectral parameter. Sufficient conditions are found under which generalized Riesz means of a given function in eigen and associated functions of these operators converge uniformly on each segment inside the main interval. For two arbitrary operators of this type and the same order the equiconvergence of their means is also established.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЯДРА $\cos(\alpha - \beta)$ КОМПОЗИЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЯДЕР

М. З. Двейрин, А. В. Фокша
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина

Keywords: ряд Фурье, ядро интегрального оператора

На конференции И. Г. Петровского 2001 г. И. В. Волович сформулировал следующую задачу.

Задача. Описать множество вещественных $g \in \mathbb{R}$ для которых существуют две измеримые 2π-периодические по обоим переменным вещественные функции $u(x, \alpha)$ и $v(x, \beta)$ такие, что $|u(x, \alpha)| \leq 1, |v(x, \beta)| \leq 1$ и справедливо равенство:

$$g \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x, \alpha) v(x, \beta) dx. \tag{1}$$

Эта задача тесно связана с задачами статистического прогноза в квантовой механике и, в частности, с теоремой Белла (см. [2]). Эта теорема утверждает, что квантовые корреляционные функции не допускают представления в виде классических корреляционных функций разделенных случайных переменных. О связи теоремы Белла с критерием локальности для гауссовых волновых функций см. в [3].

Сделаем предварительно очевидное замечание:

(i) если представление (1) имеет место для некоторого $g_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то оно имеет место для любого g с $|g| \leq |g_0|$;

Рассмотрим раздельно случаи равных и неравных между собой функций u и v.

1. В этом пункте мы приведем полное решение задачи для случая равных функций $u = v$. Справедливо следующее

Предложение 1. Равенство (1) в случае $u(x, \alpha) = v(x, \alpha)$ имеет место тогда и только тогда, когда $g \in [0,\ 1/2]$.

Доказательство. Разложим функцию $u(x, \alpha)$ в ряд Фурье по переменной α. Коэффициенты разложения будут функциями от x:

$$u(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k(x) \cos(k\alpha) + B_k(x) \sin(k\alpha)), \tag{2}$$

где:

$$A_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x, y) dy;$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x, y) \cos(ky) dy;$$

$$B_0(x) \equiv 0;$$

$$B_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x, y) \sin(ky) dy;$$

Из теоремы Фубини следует измеримость функций $A_k(x)$ и $B_k(x)$, что вместе с ограниченностью гарантирует их суммируемость.

Подставляя разложение (2) функции $u(x,\alpha)$ в уравнение (1), получим

$$2\pi g\cos(\alpha-\beta) = 2\pi g(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \sum_{k,l=0}^{\infty}((A_k,A_l)\cos k\alpha\cos l\beta+(A_k,B_l)\cos k\alpha\sin l\beta$$
$$+ (B_k,A_l)\sin k\alpha\cos l\beta+(B_k,B_l)\sin k\alpha\sin l\beta), \quad (3)$$

где знак $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в $L^2([0,\ 2\pi])$. Обе части равенства являются рядами Фурье одной функции, откуда следует совпадение соответствующих коэффициентов Фурье. В частности, получаем равенства:

$$(A_0,A_0) = (A_2,A_2) = (A_3,A_3) = ... = 0;$$
$$(B_0,B_0) = (B_2,B_2) = (B_3,B_3) = ... = 0;$$
$$(A_1,A_1) = (B_1,B_1) = 2\pi g;$$
$$(A_1,B_1) = 0;$$

Из первых двух равенств следует:

$$A_0(x)\equiv A_2(x)\equiv A_3(x)\equiv ...\equiv 0;\quad B_0(x)\equiv B_2(x)\equiv B_3(x)\equiv ...\equiv 0; \quad (4)$$

откуда

$$u(x,\alpha) = A_1(x)\cos\alpha+B_1(x)\sin\alpha. \quad (5)$$

Элементарно показывается, что при фиксированном $x\in[0,\ 2\pi]$ максимум функции $u(x,\ \alpha)$ вида (5) имеет вид

$$\max_{\alpha\in[0,\ 2\pi]} u(x,\alpha) = \sqrt{A_1^2(x)+B_1^2(x)}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что для удовлетворения условия $|u(x,\ \alpha)|\le 1$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sqrt{A_1^2(x)+B_1^2(x)}\le 1, \qquad x\in[0,\ 2\pi]. \quad (7)$$

Далее, получаем

$$4\pi g = (A_1,A_1)+(B_1,B_1) = \int_0^{2\pi}(A_1^2(x)+B_1^2(x))dx \le 2\pi, \quad (8)$$

откуда $0\le g\le \frac{1}{2}$. Для таких g функции

$$A_1(x) = \sqrt{g};\quad B_1(x) = \sqrt{g}\,\mathrm{sgn}(x); \quad (9)$$

удовлетворяют условиям (7) и, значит, функция $u(x,\alpha) = \sqrt{g}(\cos\alpha+\mathrm{sgn}(x)\sin\alpha)$ является искомой.

2. В этом пункте мы рассмотрим случай неравных между собой функций u и v, т.е. когда $u(x,y)\ne v(x,y)$.

Предложение 2. Представление (1), в котором $|u(x,\ \alpha)|\le 1$ и $|v(x,\ \alpha)|\le 1$ имеет место при $|g|\le 2/pi$.

Доказательство. Укажем функции u и v для $g=\frac{2}{\pi}$, откуда будет следовать их существование для $|g|\le\frac{2}{\pi}$. Положим

$$u(x,\alpha) = \mathrm{sgn}(\cos(x-\alpha)), \qquad v(x,\beta) = \cos(x-\beta). \quad (10)$$

Для функции $u(x,\alpha)$ известно (см. [1], стр. 115) разложение в ряд Фурье

$$u(x,\alpha)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left[\cos(2k+1)x\cos(2k+1)\alpha+\sin(2k+1)x\sin(2k+1)\alpha\right] \tag{11}$$

$$v(x,\beta)=\cos x\cos\beta+\sin x\sin\beta. \tag{12}$$

Используя ортогональность системы тригонометрических функций, находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(x,\alpha)v(x,\beta)dx=\frac{2}{\pi}(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{2}{\pi}\cos(\alpha-\beta). \tag{13}$$

Remark 8. Отметим, что результат Предложения 1 был известен И. В. Воловичу. Кроме того, он доказал невозможность представления (1) при $|g|\in[1/\sqrt{2},\ 1]$. Таким образом, сопоставление этого утвердения с Предложением 2 показывает, что в исследуемой задаче остается неисследованным случай $|g|\in(2/\pi,\ 1/\sqrt{2})$.

В заключение мы выражаем признательность М. М. Маламуду, который ознакомил нас как с задачей И. В. Воловича, так и с информацией, содержащейся в Замечании 1.

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И. *Лекции по теории аппроксимации.* — М.: "Наука", 1965, —408 с.
[2] Bell J.S., — Physics 1, 195, 1964.
[3] Volovich I. V. *Bell's Theorem and Locality in Space.*— arXiv:quant-ph/0012010 1 Dec 2000.

математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк, Украина

К ВОПРОСУ О РАССМОТРЕНИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Е.В. Иванова
Московский авиационный институт
(Государственный технический университет),
Москва, Россия

Вопросы движения и излучения заряженных частиц в электромагнитных полях привлекают внимание в связи с проблемами астрофизики, с задачами работы ускорителей и другими задачами. Особое значение эта проблема приобретает при разработке приборов, в которых используется индуцированное излучение потоков колеблющихся электронов в электромагнитных полях различной конфигурации (см. [1]). Однако аналитическое решение подобных задач стандартными методами, особенно в случае переменных полей, удается лишь в немногих случаях. Весьма плодотворным при их решении является метод интегралов движения и связанный с ним метод когерентных состояний (см. [2], [3]), разрабатывавшийся для решения задач излучения в работах [4]–[8]. Метод когерентных состояний удобен также и тем, что дает возможность наглядно проследить связь между квантовым и классическим подходами к расчету излучения, свести квантовую задачу к задаче классической.

В настоящей работе методом интегралов движения (см. монографию [3], а также ссылки, приведенные в ней) и квазиэнергий (см. [9]–[12]) рассматривается движение и излучение систем заряженных частиц в периодических по времени электромагнитных полях, которые могут быть описаны квадратичными по координатам и импульсам гамильтонианами вида

$$H(t)=\sum_{\alpha,\beta}^{6N}B_{\alpha,\beta}(t)Q_\alpha Q_\beta+H_0(t)\equiv QB(t)Q^T+H_0(t);\ H(t+T)=H(t), \tag{1}$$

где $B(t+T)=B(t)$ — $6N$-мерная симметрическая действительная матрица, $H_0(t+T)=H_0(t)$ — периодическая функция времени, а $6N$-мерный вектор $Q=(p,\,q)$ построен по закону: $p=(p_1,\ldots,\,p_N)$, $q=(q_1,\ldots,\,q_N)$, причем $q_s=(q_{s1},\,q_{s2},\,q_{s3})$ — оператор координат, а $p_s=-i\partial/\partial q_s$ — оператор импульса заряженной частицы с номером s $(s=1,\ldots,\,N)$. Здесь и далее используется система единиц, в которой $c=\hbar=1$, где c — скорость света, а $\hbar$ — постоянная Планка.

Для систем с гамильтонианом (1) в случае произвольной зависимости от времени в работах И.А. Малкина и В.И. Манько (см., например, [3]) было построено $6N$ эрмитовых интегралов движения

$$I=\Lambda(t)Q; \tag{2}$$

при этом $6N$-мерная матрица $\Lambda(t)$ находится из уравнения

$$\dot\Lambda(t)=-2\Lambda(t)JB(t) \tag{3}$$

с начальным условием

$$\Lambda(0)=E_{6N}, \tag{4}$$

где матрицы J и $B(t)$ имеют вид

$$J=\begin{pmatrix}0 & -E_{3N}\\ E_{3N} & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_2^T & B_4\end{pmatrix}, \tag{5}$$

здесь E_{3N} — $3N$-мерная единичная матрица. Матрица $\Lambda(t)$ является симплектической, т.е. $\Lambda J\Lambda^T=J$.

Отметим, что интегралы движения определяются тем условием, что их среднее значение не зависит от времени (см. [3]). Для этого достаточно потребовать, чтобы ыполнялось следующее соотношение:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H(t),\ I \right] \Psi(t) = 0, \tag{6}$$

где $H(t)$ — гамильтониан системы, а $\Psi(t)$ — решение уравнения Шредингера.

Поскольку система (1) является периодической, то при расчете излучения следует рассматривать переходы между квазиэнергетическими состояниями (см. [9]–[12]). Квазиэнергетические состояния являются решениями уравнения Шредингера, удовлетворяющими условию периодичности по времени:

$$\Psi(q;\, t+T) = \exp(-i\varepsilon T)\, \Psi(q;\, t). \tag{7}$$

Условие периодичности можно записать и другим образом:

$$\begin{aligned} &\Psi(q;\, t+T) = \varphi(q;\, t) \exp(-i\varepsilon T); \\ &\varphi(q;\, t+T) = \varphi(q;\, t). \end{aligned} \tag{8}$$

Величину ε называют квазиэнергией. Она определена с точностью до энергии целого числа колебательных квантов (см. [12]):

$$\varepsilon = n\omega, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2, \ldots\,. \tag{9}$$

Отметим, что спектр квазиэнергий и квазиэнергетические состояния найдены лишь для немногих систем (см. ссылки в [3], [7]). Здесь следует указать на работу В.М. Бабича и В.С. Булдырева [13], где рассматривалось аксиальное движение в полях волноводного типа. В работе [11] на основе теоретико-группового подхода в специальных переменных построены квазиэнергетические состояния и спектр квазиэнергий периодической квадратичной системы общего вида. Изучение квадратичной системы с гамильтонианом вида (1) при переходах между квазиэнегетическими состояниями в случае дискретного спектра квазиэнергий произведено в работе [6].

В настоящей работе рассматривается движение и излучение нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m в зависящем от времени однородном магнитном поле с потенциалом $\mathcal{H}(t) = (0,\, 0,\, \mathcal{H}_z(t))$, с векторным потенциалом

$$\mathcal{A}(r,\, t) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{H}(t) \times r \right],\ \mathcal{A}(r,\, t+T) = \mathcal{A}(r,\, t) \tag{10}$$

и зависящем от времени неоднородном электрическом поле с потенциалом

$$\varphi(r,\, t) = \frac{m}{2e} \chi(t) \left(x^2 + y^2 \right), \tag{11}$$

где $\mathcal{H}_z(t) = \mathcal{H}_z(t+T)$ и $\chi(t) = \chi(t+T)$ — периодические функции времени. Подобные потенциалы рассматривались в работах [14]–[16]. Потенциалы (10), (11) удовлетворяют уравнениям Максвелла и достаточно точно описывают электромагнитное поле в соленоиде.

Отметим, что индуцированное излучение заряда в полях, являющихся частными случаями полей, описываемых гамильтонианом (1), в классическом пределе методом усреднения рассматривалось в работе [17].

Движение по оси Z тривиальное. Далее будем рассматривать движение и излучение заряда лишь в плоскости X, Y.

Гамильтониан заряда в полях (10), (11) имеет вид

$$H_{X,Y}(t) = \frac{1}{m}(P - e\mathcal{A}(t))^2 + e\varphi(t), \tag{12}$$

где P - оператор импульса заряда.

Для потенциалов (10), (11) в работе [5] были найдены интегралы движения:

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \exp\left\{ \frac{i}{2} \int\limits_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau \right\} \left[\epsilon(t)\,(P_X + iP_Y) - i\, m\, \dot{\epsilon}(t)\,(y - ix) \right], \\ B(t) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int\limits_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau \right\} \left[\epsilon(t)\,(P_Y + iP_X) - i\, m\, \dot{\epsilon}(t)\,(x - iy) \right], \end{aligned} \tag{13}$$

где $\omega_0(t) = \dfrac{e\mathcal{H}_z(t)}{m}$, а $\epsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\epsilon}(t) + \frac{\Omega^2(t)}{4}\epsilon(t), \qquad \Omega^2(t) = \omega_0^2(t) + 4\chi(t), \tag{14}$$

и условию

$$\epsilon(t) = |\epsilon(t)| \exp\left\{ i \int\limits_0^t |\epsilon(\tau)|^{-2}\, d\tau \right\}. \tag{15}$$

Будем полагать для определенности, что $e > 0$. Для интегралов A и B справедливы коммутационные соотношения бозонных операторов рождения и уничтожения:

$$[A,\, A^+] = [B,\, B^+] = 1, \quad [A,\, B] = [A,\, B^+] = 0. \tag{16}$$

Ограничимся рассмотрением устойчивого классического движения заряда. Тогда согласно теореме Флоке-Ляпунова (см. [3]) решение уравнения (14) имеет вид

$$\epsilon(t + T) = \exp(i\varkappa T)\, \epsilon(t), \quad \varkappa = \frac{1}{T} \int\limits_0^T |\epsilon(\tau)|^{-2}\, d\tau. \tag{17}$$

Для операторов (13) в соответствии с (17) получим

$$A(T) = \exp(i\Omega_1 T)\, A(0), \quad B(T) = \exp(i\Omega_2 T)\, B(0), \tag{18}$$

где

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \left(\pm\frac{\omega_0(\tau)}{2} + \frac{1}{|\epsilon(\tau)|^2} \right) d\tau. \tag{19}$$

В силу (19) нетрудно видеть, что

$$|\alpha,\, \beta;\, T\rangle = \exp(-i\varkappa T)\ |\exp(-i\Omega_1 T)\alpha,\, \exp(-i\Omega_2 T)\beta;\, 0\rangle\,. \tag{20}$$

Отсюда можно заключить (см. [11]), что ортонормированные состояния $|n_1,\, n_2;\, t\rangle$ в устойчивом случае (17) являются квазиэнергетическими, поскольку когерентные состояния $|\alpha,\, \beta;\, T\rangle$ являются производящими для фоковских состояний $|n_1,\, n_2;\, t\rangle$, т.е. фоковские состояния удовлетворяют соотношению

$$|n_1,\, n_2;\, t + T\rangle = \exp\left(-iT(\varkappa + \Omega_1 n_1 + \Omega_2 n_2)\right)\, |n_1,\, n_2;\, t\rangle. \tag{21}$$

Таким образом, спектр квазиэнергий заряда в полях (10), (11) имеет вид

$$\varepsilon_{n_1 n_2} = \Omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \Omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2}\right). \tag{22}$$

Рассмотрим теперь излучение заряда. Воспользуемся схемой излучения нестационарных систем методом интегралов движения, развитой в [5], [6]. Ограничимся случаем, когда вектор поляризации излучаемого фотона лежит в плоскости X, Y, т.е. предполагаем, что вектор поляризации имеет вид

$$e_{\lambda,\rho} = ((e_{\lambda,\rho})_X,\, (e_{\lambda,\rho})_Y,\, 0)\,. \tag{23}$$

Будем предполагать также, что

$$\Omega_1 \pm \Omega_2 \neq n\omega, \quad \Omega_{1,2} \neq \frac{n\omega}{2}, \qquad n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{24}$$

Для мощности спонтанного дипольного излучения при переходах между когерентными состояниями $|\alpha_1,\, \beta_1;\, t\rangle \longrightarrow |\alpha_2,\, \beta_2;\, t\rangle$ с излучением фотона с частотой, лежащей в интервале между ω_λ и $\omega_\lambda + d\omega_\lambda$, с вектором поляризации $e_{\lambda,\rho}$ вида (23) вблизи направления $k_\lambda = ((k_\lambda)_X,\, (k_\lambda)_Y,\, 0)$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(n_\lambda,\, \omega_\lambda,\, e_{\lambda,\rho}) = \\
&\quad = \frac{e\,\omega_\lambda^2}{8\pi m} \int d^2\alpha_1\, d^2\beta_1\, d^2\alpha_2\, d^2\beta_2\, P_{in}(\alpha_1,\, \beta_1) P_f(\alpha_2,\, \beta_2) \exp\left(-|\alpha_1 - \beta_1|^2 - |\alpha_2 - \beta_2|^2\right) \times \\
&\qquad \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ |\eta_1(l)|^2 \left[|\alpha_1|^2 \delta(l\omega - \Omega_1 + \omega_\lambda) + |\alpha_2|^2 \delta(l\omega - \Omega_1 - \omega_\lambda) \right] + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + |\eta_2(l)|^2 \left[|\beta_1|^2 \delta(l\omega - \Omega_2 + \omega_\lambda) + |\beta_2|^2 \delta(l\omega - \Omega_2 - \omega_\lambda) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{25}$$

где n_λ — единичный вектор, направленный вдоль вектора k_λ, и

$$\eta_{1,2}(t) = \left(\dot{\bar{\epsilon}} \mp \frac{i}{2} \omega_0(t)\, \bar{\epsilon} \right) \exp\left(\mp \frac{i}{2} \int_0^t \omega_0(\tau)\, d\tau + \Omega_{1,2} t \right),$$

$$\eta_{1,2}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \eta_{1,2}(l)\, \exp(i\omega l t), \quad \eta_{1,2}(l) = \frac{1}{T} \int_0^T \eta_{1,2}(\tau)\, \exp(-i\omega l t)\, d\tau.$$

В (25) суммирование по конечным и усреднение по начальным состояниям дается при помощи соответствующих матриц плотности ρ_{in} и ρ_f, записанных через P-функции Глаубера P_{in} и P_f (см. [2], а также [3]) следующим образом:

$$\rho_{in,\,f} = \int d^2\alpha\, d^2\beta\, |\alpha,\, \beta;\, t\rangle\langle\alpha,\, \beta;\, t|\, P_{in,\,f}(\alpha,\, \beta). \tag{26}$$

Через $\delta^{(s)}$ будем обозначать s-мерную δ-функцию. Полагая в (25)
$P_{in} = \delta^{(2)}(\alpha_1 - \alpha_0)\, \delta^{(2)}(\beta_1 - \beta_0)$, $P_f = \pi^{-2}$, найдем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(n_\lambda,\, \omega_\lambda,\, e_{\lambda,\rho}) = \\
&\quad = \frac{e\,\omega_\lambda^2}{8\pi m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ |\eta_1(l)|^2 \left[|\alpha_0|^2 \delta(l\omega - \Omega_1 + \omega_\lambda) + (|\alpha_0|^2 + 1)\, \delta(l\omega - \Omega_1 - \omega_\lambda) \right] + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + |\eta_2(l)|^2 \left[|\beta_0|^2 \delta(l\omega - \Omega_2 + \omega_\lambda) + (|\beta_0|^2 + 1)\, \delta(l\omega - \Omega_2 - \omega_\lambda) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{27}$$

В приближении $|\alpha_0|,\ |\beta_0| gg 1$ соотношение (27) переходит в классическое выражение для мощности излучения, если положить

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\sqrt{m}}\,\left[\epsilon(0)\,(P_{0X}+iP_{0Y}) - i\,m\,\dot\epsilon(0)\,(y_0 - ix_0)\right], \\ \beta_0 &= \frac{1}{2\sqrt{m}}\,\left[\epsilon(0)\,(P_{0Y}+iP_{0X}) - i\,m\,\dot\epsilon(0)\,(x_0 - iy_0)\right], \end{aligned} \tag{28}$$

где $q_0 = (x_0,\, y_0)$ и $P_0 = (P_{0X},\, P_{0Y})$ — соответственно начальные координаты и начальный обобщенный импульс заряда.

Средняя за период T мощность спонтанного дипольного излучения при переходах вида $|n_1,\, n_2;\, t\rangle \longrightarrow |m_1,\, m_2;\, t\rangle$ равна

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_a(n_\lambda,\, \omega_\lambda,\, e_{\lambda,\rho}) = \\ &= \frac{e\,\omega_\lambda^2}{8\pi m} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ |\eta_1(l)|^2\,\delta_{n_2,m_2}\,\left[n_1\delta_{n_1-1,m_1}\delta(l\omega-\Omega_1+\omega_\lambda)+\right.\right. \\ &\qquad \left. +(n_1+1)\,\delta_{n_1+1,m_1}\delta(l\omega-\Omega_1-\omega_\lambda)\right] + \\ &\qquad + |\eta_2(l)|^2\,\delta_{n_1,m_1}\,\left[n_2\delta_{n_2-1,m_2}\delta(l\omega-\Omega_2+\omega_\lambda)+\right. \\ &\qquad \left.\left. +(n_2+1)\,\delta_{n_2+1,m_2}\delta(l\omega-\Omega_2-\omega_\lambda)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Из выражения (29) видно, что переход $|n_1,\, n_2;\, t\rangle \longrightarrow |m_1,\, m_2;\, t\rangle$ дает серию линий.

Рассмотрим индуцированные дипольные переходы. Будем считать, что внешняя волна с интенсивностью $I_\rho(n_\lambda,\, \omega_\lambda)$ монохроматична и имеет какую-либо одну частоту ω_λ. При переходах $|n_1,\, n_2;\, t\rangle \longrightarrow |m_1,\, m_2;\, t\rangle$ возможно как излучение, так и поглощение фотонов. Реально наблюдаемой величиной является средняя за период мощность суммарного эффекта одновременно идущих процессов дипольного индуцированного излучения и дипольного индуцированного поглощения при переходах заряда из начального квазиэнергетического состояния во все конечные квазиэнергетические состояния:

$$\mathcal{P}_{sum}(n_\lambda,\, |\Omega_j - l\omega|,\, e_{\lambda,\rho}) = -\frac{\pi^2 e^2}{m}\,\frac{I_\rho\,(n_\lambda,\, |\Omega_j - l\omega|)}{\Omega_j - l\omega}; \quad j=1,\,2;\ l\in\mathbb{Z}. \tag{30}$$

Выражением (30) дается также средняя за период T суммарная мощность дипольного индуцированного излучения и дипольного индуцированного поглощения при переходах заряда между когерентными состояниями, если P-функции Глаубера взяты в том же виде, что и в (26).

Если $\Omega_j < 0$, то из формулы (30) следует, что система способна индуцированно излучать на основной частоте $|\Omega_j|$. Индуцированное излучение возможно также на частотах $\Omega_j - l\omega$, если номера сателлитов l выбраны так, чтобы $\Omega_j - l\omega < 0$.

Представляют интерес частные случаи потенциалов (10), (11). Пусть магнитное поле постоянно, а скалярный потенциал (11) изменяется по закону

$$\chi(t) = \chi_0\,\cos\omega t, \qquad \chi_0 = const, \tag{31}$$

причем считаем, что χ_0 мало, а $\omega = \omega_0 + \gamma$, где $\gamma \to 0$. Будем полагать также, что возникающим вихревым магнитным полем можно пренебречь.

В этом случае в решении (17) уравнения (14) коэффициент $\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 - \left(\frac{\chi_0}{\omega_0}\right)^2}. \tag{32}$$

Тогда для частоты Ω_1, определенной в (19), получим следующее приближенное соотношение:

$$\Omega_1 \cong -\frac{\omega_0}{2}, \tag{33}$$

т.е. индуцированное излучение возможно как на основной частоте, так и на частотах соответствующих сателлитов.

Таким образом, система полей (10), (11) может быть использована для усиления волн соответствующих частот.

Список литературы

[1] Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Изв. ВУЗов, радиофизика, 10, с. 1414, 1967.

[2] Glauber R.J. Phys. Rev., 131, p. 2766, 1963; Phys. Rev. Lett., 10, p. 84, 1963.

[3] Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.

[4] Malkin I.A., Man'ko V.I., Trifonov D.A. Phys. Rev. D, 2, p. 1371, 1970.

[5] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. Int. J. Theor. Phys., 16, p. 503, 1977.

[6] Иванова Е.В., Малкин И.А., Манько В.И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 8, с. 3, 1977.

[7] Ivanova E.V., Malkin I.A., Man'ko V.I. J. Phys., 10A, p. 75, 1977.

[8] Иванова Е.В. В сб. Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. I, с. 358.

[9] Зельдович Я.Б. ЖЭТФ, 51, с. 1492, 1966.

[10] Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, с. 776, 1964.

[11] Malkin I.A., Man'ko V.I., Schustov A.P. Preprint PhIAN, 1975, № 109.

[12] Lewis H.R., Riesenfeld W.B. J. Math. Phis., 10, p. 1458, 1966.

[13] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.

[14] Кулькин А.Г., Лоскутов Ю.М., Павленко Ю.Г. Вестник МГУ, физика, астрономия, № 4, с. 424, 1971.

[15] Дерюгин И.А., Воронцов В.И. В сб. Квантовая электроника, 5. К.: Наукова думка, 1971, с. 281.

[16] Vorontzov V.I., Mausunbayev S.S. Phys. Lett., 53A, p. 435, 1975.

[17] Капица П.Л. УФН, 44, с. 7, 1951; УФН, 78, с. 181, 1962; Электроника больших мощностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Е.В. Иванова, Московский авиационный институт (Государственный технический университет), Москва, Россия

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Н. Д. Копачевский
Таврический национальный университет,
Симферополь, Украина

Рассмотрена задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t U_k(t,s)A_ku(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

для интегродифференцифльного уравнения второго порядка, обобщающего гиперболическое уравнение в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. При условиях, близких к стандартным, доказана теорема о сильной разрешимости на произвольном интервале времени. Изучена ассоциированная задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H}^{m+2}$. Сформулирована ассоциированная спектральная задача.

1. Введение.

В работе [1] при исследовании малых движений идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ возникла следующая задача Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0u - \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}A_1u(s)ds = f(t), \quad \gamma > 0, \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{1}$$

Здесь операторные коэффициенты обладают свойствами

$$A_0 = A_0^* >> 0, \quad A_1 = A_1^* >> 0, \quad \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_1) \subset L_2(\Omega). \tag{2}$$

Естественным обобщением задачи (1) – (2) является задача Коши в произвольном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ для уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A_ku(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3}$$

$$0 << A_0 = A_0^*, \quad \mathcal{D}(A_k) \supset \mathcal{D}(A_0), \quad \gamma_k > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{4}$$

В частности, при

$$A_k = \alpha_k A_0, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{5}$$

получаем различные модели релаксирующей жидкости, а при

$$\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{6}$$

– более сложные физические модели.

В работах [1], [2] доказаны теоремы о существовании обобщенных решений задачи (1), в [3, т.2, с. 398-401] изучались сильные решения задачи (3) – (4). В данной работе будет доказана теорема о сильной разрешимости задачи, более общей, чем задача (3) – (4).

Отметим, что в работе [4] изучена задача

$$\frac{du}{dt} + A_0u + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}A_ku(s)ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{7}$$

при тех же предположениях (4) и $A_k = A_k^* >> 0$, причем подробно рассмотрены как эволюционная, так и соответствующая спектральная задачи.

Заметим еще, что в [5] исследованы абстрактные интегродифференциальные уравнения второго порядка в произвольном банаховом пространстве. При определенных предположениях в этой работе установлено существование и единственность решений задачи Коши на отрезке $[-T, T]$ с достаточно малым $T > 0$.

2. Постановка задачи.

В произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^t U_k(t,s) A_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{8}$$

где операторы A_k удовлетворяют условиям (4), а $U_k(t,s)$ – оператор-функции t и s со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}),\ k = 1, 2, \ldots, m$. Ограничения на эти функции будут сформулированы позже (см. (18), (19)).

Отметим, что при условиях

$$A_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

задача (8) превращается в стандартную задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения гиперболического типа

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_0 u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{10}$$

Хорошо известны (см., например, [6], с. 301; [7], с. 177) теоремы о разрешимости задачи Коши (10). Если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad f(t) \in C^1\left([0,T]; \mathcal{H}\right), \tag{11}$$

то задача (10) имеет единственное сильное решение $u = u_0(t)$ на отрезке $[0, T]$, выражаемое формулой

$$u_0(t) = \cos(tA_0^{\frac{1}{2}})u^0 + \sin(tA_0^{\frac{1}{2}})A_0^{-\frac{1}{2}}u^1 + \int\limits_0^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) A_0^{-\frac{1}{2}} f(s) ds. \tag{12}$$

Если выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad u^1 \in \mathcal{H}, \quad f(t) \in C\left([0,T]; \mathcal{H}\right), \tag{13}$$

то задача (10) имеет единственное слабое решение, также выражаемое формулой (12). Для сильного и слабого решений справедлив закон баланса полной энергии

$$\frac{1}{2}\|\frac{du}{dt}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|A_0^{\frac{1}{2}}u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|u^1\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|A_0^{\frac{1}{2}}u^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathrm{Re}\int\limits_0^t \left(f(s), u(s)\right)_{\mathcal{H}} ds. \tag{14}$$

Здесь левая часть, т.е. полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия, является непрерывной функцией t.

3. О разрешимости задачи Коши для интегродифференциального уравнения.

Прежде чем перейти к выяснению условий разрешимости задачи (8), сформулируем теорему о разрешимости задачи (10), обобщающую приведенное выше классическое утверждение и следующее из монографии [8] (см. стр. 337 – 339): если взамен (11) выполнены условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A_0), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), \quad f(t) \in \mathcal{W}_p^1\left([0,T];\mathcal{H}\right), \quad p>1, \tag{15}$$

то задача (10) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$. Здесь под $\mathcal{W}_p^1\left([0,T];\mathcal{H}\right)$ понимается пространство функций $u(t)$ с нормой

$$\|u(t)\|_{\mathcal{W}_p^1([0,T];\mathcal{H})} := \sum_{k=0}^{1}\left(\int_0^T \|u^{(k)}(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{16}$$

плотным множеством в котором является $C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right)$.

Определение 1. Назовем сильным решением задачи Коши (8) на отрезке $[0,T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, $t\in[0,T]$, для которой выполнены следующие свойства:
а) $u(t)\in\mathcal{D}(A_0)$ для любого $t\in[0,T]$ и $A_0u(t)\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$;
б) $u^{'}(t)\in C\left([0,T];\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})\right)$;
в) $u^{''}(t)\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right)$;
г) выполнены уравнение и начальные условия (8).

Заметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (8) являются условия

$$u^0\in\mathcal{D}(A_0), \quad f(t)\in C\left([0,T];\mathcal{H}\right). \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (8) *выполнены условия* (4), (15), *а также условия*

$$U_k(t,s)\in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\Big), \tag{18}$$

$$\frac{\partial U_k(t,s)}{\partial t}\in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\Big), \quad k=1,2,\ldots,m. \tag{19}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Перенесем в (8) интегральные слагаемые в правую часть и введем обозначение

$$\widehat{f}(t) := f(t)-\sum_{k=1}^{m}\int_0^t U_k(t,s)A_ku(s)ds. \tag{20}$$

Считая, что функция $\widehat{f}(t)$ известна, и используя формулу (12) решения задачи Коши (10) для гиперболического уравнения, приходим для искомой функции $u(t)$ к интегральному уравнению Вольтера второго рода:

$$u(t)+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t A_0^{-\frac{1}{2}}\sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)ds\int_0^s U_k(s,\xi)A_ku(\xi)d\xi = u_0(t). \tag{21}$$

Здесь $u_0(t)$ задана формулой (12) и строится по данным задачи (10), причем она в силу условий (15) является сильным решением задачи (8) без интегральных слагаемых, т.е. задачи (10). Это означает, в частности, что

$$u_0(t)\in C^2\Big([0,T];\mathcal{H}\Big)\cap C^1\left([0,T];\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})\right)\cap C\Big([0,T];\mathcal{D}(A_0)\Big). \tag{22}$$

Осуществим в повторных интегралах (21) замену порядка интегрирования:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) ds \int\limits_0^s U_k(s,\xi)A_k u(\xi)d\xi = \\ = \int\limits_0^t \left(\int\limits_\xi^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) U_k(s,\xi)ds\right) A_k u(\xi)d\xi.\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь внутренний интеграл в силу (18), (19) преобразуется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}&\int\limits_\xi^t \sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) U_k(s,\xi)ds = \\ &= \left|\begin{matrix}\sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) ds = dv(s), \quad v(s) = -A_0^{-\frac{1}{2}}\cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right), \\ U_k(s,\xi) = u(s), \quad du = \frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\end{matrix}\right| = \\ &= -A_0^{-\frac{1}{2}}\cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) U_k(s,\xi)\Big|_{s=\xi}^t + A_0^{-\frac{1}{2}}\int\limits_\xi^t \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds = \\ &= -A_0^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left((t-\xi)A_0^{\frac{1}{2}}\right) U_k(\xi,\xi) - U_k(t,\xi) + \int\limits_\xi^t \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\right) =: \\ &=: A_0^{-\frac{1}{2}} V_k(t,\xi), \quad V_k(t,t) \equiv 0.\end{aligned} \tag{24}$$

С учетом (23), (24) уравнение (21) преобретает вид

$$u(t) + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t A_0^{-1} V_k(t,\xi)A_k u(\xi)d\xi = u_0(t), \tag{25}$$

где согласно (18), (19) операторные функции

$$V_k(t,\xi) \in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\Big). \tag{26}$$

Рассмотрим уравнение (25) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(A_0) = \mathcal{D}(A_0)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{H}(A_0)} := (A_0 u, A_0 v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall u,v \in \mathcal{D}(A_0), \tag{27}$$

порождающим норму, эквивалентную норме графика оператора A_0 (поскольку $A_0 >> 0$, см. (4)). В этом уравнении оператор-функции

$$W_k(t,\xi) := A_0^{-1} V_k(t,\xi)A_k, \quad k = 1,2,\dots m, \tag{28}$$

обладают свойством

$$W_k(t,\xi) \in C\Big([0,T]\times[0,T];\mathcal{D}(A_0)\Big), \quad k = 1,2,\dots m. \tag{29}$$

В самом деле, в силу второго условия (4) опреатор A_k ограниченно действует из $\mathcal{H}(A_0)$ в $\mathcal{H}$, функция $V_k(t,\xi)$ обладает свойством (26), а оператор A_0^{-1} ограниченно действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}(A_0)$.

Опираясь на свойства (29) и представляя (25) в виде интегрального уравнения

$$u(t) + \int\limits_0^t W(t,\xi)u(\xi)d\xi = u_0(t), \tag{30}$$

$$W(t,\xi) := \sum_{k=1}^{m} W_k(t,\xi) \in C\Big([0,T]\times[0,T]; \mathcal{D}(A_0)\Big), \tag{31}$$

приходим к выводу, что оно имеет единственное решение

$$u(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{D}(A_0)\Big), \tag{32}$$

поскольку заданная функция $u_0(t)$ обладает этим свойством, а $W(t,\xi)$ – свойством (31).

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства б) и в) из определения 1 сильного решения задачи (8).

Формальное дифференцирование обеих частей (25) приводит к формулам

$$u'(t) = u_0'(t) + \sum_{k=1}^{m} A_0^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \Bigg(\sin\Big((t-\xi)A_0^{\frac{1}{2}}\Big) U_k(\xi,\xi) + \\ + \int\limits_\xi^t \sin\Big((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\Big) \frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\Bigg) A_k u(\xi)d\xi, \tag{33}$$

$$u''(t) = u_0''(t) + \sum_{k=1}^{m} \Bigg[\int\limits_0^t \cos\Big((t-\xi)A_0^{\frac{1}{2}}\Big) U_k(\xi,\xi)A_k u(\xi)d\xi + \\ + \int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_\xi^t \cos\Big((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\Big) \frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds\Bigg) A_k u(\xi)d\xi\Bigg]. \tag{34}$$

Так как

$$u_0'(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})\Big), \quad A_k u(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}\Big), \tag{35}$$

то из (33), (18), (19), следует свойство б) из определения сильного решения. Далее, так как $u_0''(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}\Big)$, то из (34) получаем условие в). Наконец, непосредственный подсчет на основе формул (31), (28), (24), (30), (33), (34) показывает, что функция $u(t)$, являющаяся решением уравнения (30), удовлетворят уравнению (8) на отрезке $[0,T]$. Кроме того, из (30) и (33) следует, что $u(0) = u_0(0) = u^0$, $u'(0) = u_0'(0) = u^1$. □

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Если в задаче* (3), (4) *выполнены условия* (15), *то уравнение* (3) *имеет сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Так как задача (3) есть частный случай задачи (8) с $U_k(t,s) := \exp\left(-\gamma_k(t-s)\right) I$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то выполнены свойства (18), (19). □

Замечание 4. Из теоремы 2, в свою очередь, следует, что при условиях (15) задача (1), (2) имеет сильное решение на $[0,T]$.

Замечание 5. Как следует из доказательства теоремы 1, требование (19) в этой теореме можно ослабить и заменить его на условие

$$\int_{\xi}^{t} \cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds \in C\bigg([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathcal{H})\bigg), \tag{36}$$

обеспечивающее свойство (26).

Замечание 6. Теорема 1 допускает обобщение на случай банахова пространства $\mathcal{E}$ при условии, что оператор A_0 представим в виде

$$A_0 = -B_0^2 + F, \quad \mathcal{D}(F) \supset \mathcal{D}(B_0), \quad 0 \in \rho(B_0), \tag{37}$$

где B_0 – генератор C_0-группы на $\mathcal{E}$ (см. [6], с. 299 – 301; [7], с. 165 – 172).

Замечание 7. Используя теорию операторных косинус- и синус-функций $C(t)$ и $S(t)$ (взамен $\cos\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ и $A_0^{-\frac{1}{2}}\sin\left((t-s)A_0^{\frac{1}{2}}\right)$), дающих решение задачи (10) в виде

$$u_0(t) = C(t)u^0 + S(t)u^1 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \tag{38}$$

обобщающем формулу (12), можно доказать аналог теоремы 1 для случая произвольного банахова пространства $\mathcal{E}$ при условиях (37), (18), (36), а также условиях

$$u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B_0), \quad f(t) \in \mathcal{W}_p^1\left([0,T];\mathcal{E}\right), \tag{39}$$

обобщающих (15). При этом, используя формулу

$$S(t)v = -A_0^{-1}C^{'}(t)v, \quad v \in C^1\left(\mathbb{R}_+,\mathcal{E}\right), \tag{40}$$

(см. [9], с. 26, формула 9^0), аналогично (21), (23) – (24) приходим снова к формуле (25), где теперь (вместо (24))

$$V_k(t,\xi) := C(t-\xi)U_k(\xi,\xi) - U_k(t,\xi) + \int_{\xi}^{t} C(t-s)\frac{\partial U_k}{\partial s}(s,\xi)ds. \tag{41}$$

4. Ассоциированные задачи Коши.

Рассмотрим частный случай задачи (8), обобщающий задачу (1):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}Bu(s)ds - \int_0^t e^{-\delta(t-s)}Cu(s)ds = f(t), \tag{42}$$

$$u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1, \quad 0 << A = A^*, \quad B = B^* \geq 0, \quad C = C^* \geq 0, \tag{43}$$

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B), \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C), \quad \gamma > 0, \quad \delta > 0. \tag{44}$$

Эту задачу для интегродифференциального уравнения можно привести к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств по схеме работы [4].

Введем новые неизвестные функции

$$v(t) := \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}B^{\frac{1}{2}}u(s)ds, \quad v(0) = 0, \tag{45}$$

$$w(t) := \int\limits_0^t e^{-\delta(t-s)} C^{\frac{1}{2}} u(s) ds, \quad w(0) = 0. \tag{46}$$

Если $u = u(t)$ – сильное решение задачи (42) – (44), то $v(t)$ и $w(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dv}{dt} = B^{\frac{1}{2}} u - \gamma v, \quad \frac{dw}{dt} = C^{\frac{1}{2}} u - \delta w. \tag{47}$$

Вводя еще функцию

$$z(t) := \frac{du}{dt}, \tag{48}$$

приходим взамен (42) – (44) к задаче Коши вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B^{\frac{1}{2}} & -C^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & -\gamma I & 0 & 0 \\ -C^{\frac{1}{2}} & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$u(0) = u^0, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad z(0) = u^1, \tag{50}$$

т.е. к задаче

$$\mathcal{J} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{51}$$

$$y := (u; v; w; z)^t, \quad f_0(t) := (f(t); 0; 0; 0)^t.$$

Здесь операторная матрица

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

очевидно, обладает свойствами

$$\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^2 = \mathcal{J}, \tag{53}$$

т.е. является канонической симметрией.

Что касается операторной матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & B^{\frac{1}{2}} & -C^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & -\gamma I & 0 & 0 \\ -C^{\frac{1}{2}} & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{54}$$

заданной на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) := \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^4, \tag{55}$$

то она обладает следующими свойствами.

1°. Оператор $\mathcal{A}_0$ задан на плотной в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H}^4 := \oplus_{k=1}^4 \mathcal{H}_k, \mathcal{H}_k := \mathcal{H}$, области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ из (55) и является симметричным вообще говоря неограниченным оператором.

Свойство симметрии оператора $\mathcal{A}_0$ очевидно из его определения. Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$ определен корректно на $\mathcal{D}(A_0)$, так как из (43), (44) следует, что

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}), \quad \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}, \tag{56}$$

и поэтому $\mathcal{A}_0 y \in \mathcal{H}^4$ при любом $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.

2°. Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает факторизацию с симметричными крайними множителями в следующей форме

$$\mathcal{A}_0 = \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I) \begin{pmatrix} I & Q_B^+ & -Q_C^+ & 0 \\ Q_B & -\gamma I & 0 & 0 \\ -Q_C & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I), \tag{57}$$

$$Q_B := B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad Q_C := C^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{58}$$

$$Q_B^+ := A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{D}(Q_B^+) := \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad Q_C^+ := A^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{D}(Q_C^+) := \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}). \tag{59}$$

Тождество (57) проверяется непосредственно, исходя из определений (54), (55), (58), (59).

3°. Операторы Q_B, Q_B^+, Q_C и Q_C^+ обладают свойствами

$$Q_B^+ = Q_B^* \mid \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad \overline{Q_B^+} = Q_B^*, \quad Q_C^+ = Q_C^* \mid \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}), \quad \overline{Q_C^+} = Q_C^*. \tag{60}$$

В самом деле, так как в силу (44) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$, то по известному неравенству Гайнца (см., например, [10], стр. 254)

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}), \tag{61}$$

и потому операторы Q_B и Q_C ограничены в $\mathcal{H}$. Далее, при любом $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}})$ имеем

$$(Q_B u, v) = (B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} u, v) = (u, A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} v) = (u, Q_B^+ v), \tag{62}$$

откуда следует первое свойство (60), а после замыкания - и второе. Эти же свойства для оператора Q_C^+ доказывается аналогично.

4°. Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает факторизацию в форме Шура-Фробениуса:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ Q_B A^{-\frac{1}{2}} & I & 0 & 0 \\ -Q_C A^{-\frac{1}{2}} & -Q_C Q_B^+ V_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{diag}(A, -V_2; V_3; -I) \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}} Q_B^+ & -A^{-\frac{1}{2}} Q_C^+ & 0 \\ 0 & I & -V_2 Q_B Q_C^+ & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{63}$$

$$V_2 := (\gamma I + Q_B Q_B^+)^{-1}, \quad V_3 := \delta I - Q_C Q_C^+ - Q_C Q_B^+ V_2 Q_B Q_C^+, \tag{64}$$

где в силу предыдущего оператор V_2 ограничен и положительно определен.

5°. Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает замыкание до самосопряженного оператора $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_0}$, имеющего представление в двух формах:

а) в виде (57) с заменой Q_B^+ на Q_B^* и Q_C^+ на Q_C^*, т. е.

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I) \begin{pmatrix} I & Q_B^* & -Q_C^* & 0 \\ Q_B & -\gamma I & 0 & 0 \\ -Q_C & 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{\frac{1}{2}}; I; I; I); \tag{65}$$

б) в форме Шура-Фробениуса, следующей из (63):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ Q_B A^{-\frac{1}{2}} & I & 0 & 0 \\ -Q_C A^{-\frac{1}{2}} & -Q_C Q_B^* \widetilde{V}_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \operatorname{diag}(A, -\widetilde{V}_2; \widetilde{V}_3; -I) \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}} Q_B^* & -A^{-\frac{1}{2}} Q_C^* & 0 \\ 0 & I & -\widetilde{V}_2 Q_B Q_C^* & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$\widetilde{V}_2 := (\gamma I + Q_B Q_B^*)^{-1}, \quad \widetilde{V}_3 := \delta I - Q_C Q_C^* - Q_C Q_B^* \widetilde{V}_2 Q_B Q_C^*. \tag{67}$$

В самом деле, в (57) крайние множители совпадают и являются неограниченными самосопряженными операторами, заданными на области определения $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{H}^3$, плотной в $\mathcal{H}^4$; они имеют ограниченные обратные, заданные на всем пространстве. Средний множитель в (57) допускает замыкание с области определения $\mathcal{H} \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{H}$, плотной в $\mathcal{H}^4$, на всё пространство $\mathcal{H}^4$. Это замыкание состоит в замене Q_B^+ на Q_B^* и Q_C^+ на Q_C^*, причем после замыкания упомянутый средний множитель является ограниченным оператором.

Аналогичные рассуждения приводятся и в случае факторизации в форме (63). Здесь крайние множители, в силу их треугольной структуры, ограниченно обратимы и допускают замыкание на все пространство $\mathcal{H}^4$, а средний (диагональный) множитель также замыкаем на область определения $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{H}^3$, плотную в $\mathcal{H}^4$, причем V_2 после замыкания переходит в оператор $\widetilde{V}_2$, ограниченный и имеющий ограниченный обратный, а V_3 после замыкания переходит в оператор $\widetilde{V}_3$, ограниченный и заданный на всем $\mathcal{H}$.

6°. После замыкания оператор $\mathcal{A}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ (u; v; w; z)^t \in \mathcal{H}^4 : \ u + A^{-\frac{1}{2}} Q_B^* v - A^{-\frac{1}{2}} Q_C^* w \in \mathcal{D}(A) \} \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \tag{68}$$

и действует по закону

$$\mathcal{A} y = \begin{pmatrix} A(u + A^{-\frac{1}{2}} Q_B^* v - A^{-\frac{1}{2}} Q_C^* w) \\ B^{\frac{1}{2}} u - \gamma v \\ -C^{\frac{1}{2}} u + \delta w \\ -z \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{69}$$

Эти факты непосредственно следуют из (65) либо (66). Отметим только, что из (68) следует свойство $u \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ для элементов $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

7°. Оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным снизу самосопряженным оператором, заданным на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Для доказательства этого свойства рассмотрим оператор $\mathcal{A}_0 + c\mathcal{J}$ с достаточно большим положительным с. Такой оператор имеет факторизацию вида (57) со средним множителем

$$\begin{pmatrix} I + cA^{-1} & Q_B^+ & -Q_C^+ & 0 \\ Q_B & (c-\gamma)I & 0 & 0 \\ -Q_C & 0 & (\delta + c)I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c-1)I \end{pmatrix}, \tag{70}$$

который, во-первых, допускает замыкание (заменой Q_B^+ на Q_B^* и Q_C^+ на Q_C^*), а во вторых, после замыкания и при достаточно больших $c{>}0$ является положительно определенным оператором и потому имеющим ограниченный обратный оператор. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A} + c\mathcal{J} = \overline{\mathcal{A}_0 + c\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{A}_0} + c\mathcal{J}$ имеет ограниченный обратный, заданый на всем $\mathcal{H}^4$. Так как он положительно определен и область его значений совпадает со всем $\mathcal{H}^4$, то

$\mathcal{A}+c\mathcal{J}$ – самосопряженный оператор, а потому оператор $\mathcal{A}=(\mathcal{A}+c\mathcal{J})-c\mathcal{J}$ самосопряжен и ограничен снизу.

Опираясь на доказанные утверждения, рассмотрим проблему, более общую чем (42) - (44):

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dt^2}+Au+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}B_k u(s)ds-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t e^{-\delta_j(t-s)}C_j u(s)ds=f(t),\\
&u(0)=u^0,\quad u^{'}(0)=u^1,\quad \gamma_k>0,\quad k=1,2,...,m,\quad \delta_j>0,\quad j=1,2,...,n,\\
&\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(B_k),\quad k=1,...,m,\quad \mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(C_j),\quad j=1,...,n,\\
&A=A^*>>0,\quad B_k=B_k^*\geq 0,\quad k=1,...,m,\quad C_j=C_j^*\geq 0,\quad j=1,...,n.
\end{aligned}\tag{71}$$

Преобразованиями, аналогичными (45), (46), ее можно привести к задаче Коши вида (49), (50). Полагая

$$v_k:=\int\limits_0^t e^{-\gamma_k(t-s)}B_k^{\frac{1}{2}}u(s)ds,\quad v_k(0)=0,\quad k=1,...,m,\tag{72}$$

$$w_j:=\int\limits_0^t e^{-\delta_j(t-s)}C_j^{\frac{1}{2}}u(s)ds,\quad w_j(0)=0,\quad j=1,...,n,\tag{73}$$

приходим после замены (48) к задаче, которая в векторно-матричной форме и в блочном виде принимает вид:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&I\\0&-\widehat{I}_m&0&0\\0&0&\widehat{I}_n&0\\I&0&0&0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\\widehat{v}\\\widehat{w}\\z\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}A&\widehat{B}^{\frac{1}{2}}&-\widehat{C}^{\frac{1}{2}}&0\\(\widehat{B}^{\frac{1}{2}})^t&\widehat{\gamma I}_m&0&0\\-(\widehat{C}^{\frac{1}{2}})^t&0&\widehat{\delta I}_n&0\\0&0&0&-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\\widehat{v}\\\widehat{w}\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(t)\\\widehat{0}_m\\\widehat{0}_n\\0\end{pmatrix},\tag{74}$$

$$u(0)=u^0,\quad \widehat{v}(0)=0,\quad \widehat{w}(0)=0,\quad z(0)=u^1.\tag{75}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\widehat{I}_m:=\operatorname{diag}(\underbrace{I,...,I}_{m}),\quad \widehat{I}_n:=\operatorname{diag}(\underbrace{I,...,I}_{n}),\\
\widehat{v}:=(v_1;...;v_m)^t,\quad \widehat{w}:=(w_1;...;w_n)^t,\\
\widehat{B}^{\frac{1}{2}}:=(B_1^{\frac{1}{2}};...;B_m^{\frac{1}{2}}),\quad \widehat{C}^{\frac{1}{2}}:=(C_1^{\frac{1}{2}};...;C_n^{\frac{1}{2}}),\\
\widehat{\gamma I}_m:=\operatorname{diag}(\gamma_k I)_{k=1}^m,\quad \widehat{\delta I}_n:=\operatorname{diag}(\delta_j I)_{j=1}^n,
\end{gathered}\tag{76}$$

а символом $(...)^t$, как и выше, обозначена операция транспонирования.

Задача (74) – (76) коротко может быть записана в виде

$$\begin{gathered}
\widehat{\mathcal{J}}\frac{d\widehat{y}}{dt}+\widehat{\mathcal{A}}_0 y=\widehat{f}_0(t),\quad \widehat{y}(0)=\widehat{y}^0,\\
\widehat{y}:=(u;\widehat{v};\widehat{w};z)^t,\quad \widehat{f}_0(t):=(f(t);\widehat{0}_m;\widehat{0}_n;0)^t,
\end{gathered}\tag{77}$$

где оператор $\widehat{\mathcal{J}}$ снова обладает свойствами (53), а для $\widehat{\mathcal{A}}_0$, как и для оператора $\mathcal{A}_0$ из (54), справедливы общие свойства $1^\circ-7^\circ$, с соответствующими изменениями.

Рассмотрим наряду с задачами Коши (51), (77), связанными с проблемами (42) – (44) и (71) соответственно, аналогичные задачи с замкнутыми, а потому самосопряженными коэффициентами $\mathcal{A}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$:

$$\mathcal{J}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f_0(t), \quad y(0) = y^0, \tag{78}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\frac{d\widehat{y}}{dt} + \widehat{\mathcal{A}}y = \widehat{f}_0(t), \quad \widehat{y}(0) = \widehat{y}^0. \tag{79}$$

Определение 2. Будем говорить, что задача (78) ассоциирована с задачей (51) и задачей (42) – (44), а задача (79) ассоциирована с задачами (77) и (71).

Опираясь на доказанные выше утверждения, установим следующий факт.

Теорема 3. *Задача* (42) – (44) *для интегродифференциального уравнения, а также задача* (51) *для векторно-матричного уравнения и ассоциированная задача* (78) *равносильны, т.е. из существования и единственности сильного решения любой из этих задач на отрезке [0, T] следует существование и единственность сильного решения двух других задач.*

Аналогичное утверждение имеет место и для задач (71), (77) и (79).

Доказательство. Пусть задача (42) – (44) имеет единственное сильное решение на [0,T]. Тогда из построений в начале п. 4, связанных с переходом от проблемы (42) – (44) к задаче Коши (49) – (50), а также (51), следует, что задача (51) имеет единственное сильное решение на отрезке [0,T]. При этом решение

$$y(t) = (u(t); v(t); w(t); z(t))^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

и $\mathcal{A}_0 y(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}^4\Big)$, поэтому наряду с (51) имеет место и уравнение (78), причем $\mathcal{A}y(t) \in C\Big([0,T]; \mathcal{H}^4\Big)$ и все слагаемые в (78) непрерывны по $t \in [0,T]$. Значит, задача (78) в этом случае имеет единственное сильное решение на отрезке [0,T].

Убедимся теперь, что из существования единственного сильного решения задачи (78) на отрезке [0,T] следует существование единственного сильного решения задачи (51). Отсюда, в свою очередь, будет следовать существование единственного сильного решения задачи (42) – (44).

Итак, пусть существует единственное сильное решение $y(t)$ задачи (78) на отрезке [0,T]. Тогда $y(t) = (u(t); v(t); w(t); z(t))^t \in \mathcal{D}(A)$ и выполнены уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{dz}{dt} + A(u + A^{-\frac{1}{2}}Q_B^* v - A^{-\frac{1}{2}}Q_C^* w) = f(t), \quad z(0) = u^1,\\
&\frac{dv}{dt} + \gamma v = -B^{-\frac{1}{2}}u, \quad v(0) = 0,\\
&\frac{dw}{dt} + \delta w = -C^{-\frac{1}{2}}u, \quad w(0) = 0,\\
&\frac{du}{dt} = z, \quad u(0) = u^0,
\end{aligned} \tag{80}$$

причем здесь все слагаемые принадлежат $C\Big([0,T]; \mathcal{H}\Big)$, а выражение в скобках в первом уравнении – пространству $C\Big([0,T]; \mathcal{D}(A)\Big)$. Установить равносильность задач (80) и (51), т.е. (49), (50), эквивалентно, в силу (57) – (59), (63) – (64), (65), (66) – (67), тому, что в первом уравнении (80) можно для решений заменить Q_B^* на Q_B^+, Q_C^* на Q_C^+ и раскрыть скобки. Докажем, что это можно сделать.

В самом деле, введем обозначение

$$u(t) + A^{-\frac{1}{2}}Q_B^* v(t) - A^{-\frac{1}{2}}Q_C^* w(t) =: \varphi(t) \in C\Big([0,T];\mathcal{D}(A)\Big). \tag{81}$$

Из второго и третьего уравнений (80) получаем формулы (45), (46), причем $v(t)$ и $w(t)$ принадлежат $C^1\Big([0,T];\mathcal{H}\Big)$, так как по предположению эти функции являются компонентами сильного решения $y(t)$ задачи (78). Подставляя эти формулы в (81), приходим к соотношению

$$u(t) + \int_0^t \Big(A^{-\frac{1}{2}}Q_B^* B^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma(t-s)} - A^{-\frac{1}{2}}Q_C^* C^{\frac{1}{2}} e^{-\delta(t-s)}\Big) u(s)ds = \varphi(t). \tag{82}$$

Введем, как в п. 3, гильбертово пространство $\mathcal{H}(A) = \mathcal{D}(A)$ со скалярным произведением вида (27) (с $A_0 = A$) и рассмотрим (82) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода для неизвестной функции $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}(A)$ и заданной функции $\varphi(t) \in C\Big([0,T];\mathcal{H}(A)\Big)$.

При этом, как нетрудно видеть, ядро $V(t,s)$ интегрального оператора в (82) является непрерывной функцией $t-s$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{H}(A))$. В самом деле, если $v \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}(A)$, то в силу (44) $B^{\frac{1}{2}}v \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, а потому, согласно свойству 3° (см. (60)), $Q_B^* B^{\frac{1}{2}} v = Q_B^+ B^{\frac{1}{2}} v = A^{-\frac{1}{2}} B v$. Поэтому

$$V(t,s)|\mathcal{H}(A) = A^{-1}\left(e^{-\gamma(t-s)}B - e^{-\delta(t-s)}C\right), \tag{83}$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Значит, интегральное уравнение (82) имеет единственное решение $u(t) \in C\Big([0,T];\mathcal{H}(A)\Big)$. Тогда $v(t) \in C\Big([0,T];\mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}})\Big)$, $w(t) \in C\Big([0,T];\mathcal{D}(C^{\frac{1}{2}})\Big)$, и в первом уравнении (80) можно заменить Q_B^* на Q_B^+, Q_C^* на Q_C^+ и раскрыть скобки.

Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы. Доказательство второго утверждения проводится аналогично. ☐

Следствием теоремы 4.2 является

Теорема 4. *Если выполнены условия* (15) *(для оператора A и функции $f(t)$), то каждая из задач* (42) – (44)*,* (51) *и* (78)*, а также каждая из задач* (71)*,* (77) *и* (79) *имеют единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Достаточно заметить, что существование и единственность сильного решения задачи (42) – (44) следует из теоремы 1, так как наряду с условиями (15) в задаче (42) – (44) выполнены условия (18), (19). Аналогичное замечание относится и к задаче (71). ☐

5. Ассоциированные спектральные задачи.

Рассмотрим решения однородной задачи (78), зависящие от t по закону

$$y(t) = e^{-\lambda t}y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^4, \tag{84}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – неизвестный заранее комплексный параметр, а $y \neq 0$ – так называемый амплитудный элемент. Решения такого вида называют нормальными движениями, отвечающими проблеме (78), причем λ есть комплексный декремент затухания.

Для амплитудных элементов y получаем спектральную задачу

$$\mathcal{A}y = \lambda\mathcal{J}y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{85}$$

где $\mathcal{J}$ и $\mathcal{A}$ – операторные матрицы (52), (65), (66), свойства которых описаны в п. 4. В частности, оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным снизу самосопряженным оператором, а $\mathcal{J}$ есть оператор канонической симметрии.

Для нормальных движений $\widehat{y}(t) = e^{-\lambda t}\widehat{y}$, $\widehat{y} \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$, отвечающих задаче Коши (79), приходим к аналогичной проблеме

$$\widehat{\mathcal{A}}\widehat{y} = \lambda\widehat{\mathcal{J}}\widehat{y}, \quad \widehat{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{86}$$

в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^m \oplus \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{H}$. Здесь общие свойства операторов $\widehat{\mathcal{J}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ – те же, что и в задаче (85).

Определение 3. Назовем задачу (85) спектральной задачей, ассоциированной с задачей (42) – (44) для интегродифференциального уравнения второго порядка. Соответственно задачу (86) назовем спектральной задачей, ассоциированной с задачей (71).

Отметим простые свойства решений задачи (85).

1°. Задача (85) есть задача на собственные значения $\mathcal{J}$ – самосопряженного оператора:

$$\mathcal{J}\mathcal{A}y = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{87}$$

2°. Спектр задачи (85) расположен симметрично относительно действительной оси.

Аналогичные свойства имеют место и для задачи (86). Детальное изучение свойств решений задач (85), (86) будет проведено в другой работе.

Список литературы

[1] Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations.* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз., Симферополь, 1994, с. 41 – 42.

[2] Azizov T.Ya., Kopachevsky N.D., Orlova (Bolgova) L.D. *Evolution and spectral problems generated by problems on small movements of a visco-elastic or relaxing fluid.* // IWOTA – 95, Final Programme and Book of Abstracts, Regesburg (Germany), 1995, p. 40.

[3] Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics.* – Basel; Boston; Berlin; Birkhauser.
Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid. – 2001, 384 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
Vol. 2. Not self-adjoint problems for a viscous fluid. – 2003 (to appear).

[4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости* // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 6., 1998, с. 5 – 33.

[5] Travis C.C., Webb G.F. *An abstract second order semilinear Volterra integrodifferential equation.* // SIAM J. Math. Anal., Vol. 10, No.2, March 1979, 412 – 424.

[6] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.

[7] Голдстейн Дж. *Полугруппы линейных операторов и их прилоэжения.* – К.: Выща шк., 1989. – 347 с.

[8] Yakubov S., Yakubov Ya. *Differential-operator Equations.* Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman & Hall / CRC, Bora Raton, 2000, pp. 542.

[9] Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. *Дифференциально-операторные уравнения и некоторые задачи.* – М.: Наука, 1995. – 176 с.

[10] Крейн С.Г. *Функциональный анализ (справочное пособие грыппы авторов под общей редакцией С.Г. Крйна).* – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Mathematical Analysis Chair, Taurida National V. Vernadsky University, Vernadsky av., 4, Simferopol 95007, Crimea, Ukraine.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

А. Ю. Мальцев
Национальный Технический Университет Украины 'КПИ',
Киев, Украина

1. Цель данной статьи - получить решение задачи Коши для параболического уравнения с нерегулярным эллиптическим оператором, зависящим от времени для функций, заданных на гильбертовом пространстве, а так же исследовать свойства этого решения. Она частично обобщает результаты, полученные автором в [1] для "существенно бесконечномерного"случая. Отметим, что задача Коши для параболического уравнения с нерегулярным оператором, но в стационарном случае рассматривалась в [2].

Пусть H - сепарабельное вещественное гильбертово пространство, а $L(H)$ - пространство ограниченных линейных операторов в H. Обозначим через $Q_{n,c}$ множество всех линейных ограниченных операторов ранг которых не превосходит n, а норма не превосходит c. Множество $M \subseteq L(H)$ назовём почти компактным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subseteq L(H)$, и числа $n \in \mathbf{N}$, $c > 0$, такие, что $K + Q_{n,c}$ является ε - сетью для M. Класс таких множеств рассматривался, например, в [3]. Пусть множество $\mathfrak{A} \subseteq C^2(H)$ состоит из таких функций из $C^2(H)$ для которых: 1.) $\forall R > 0$ существует почти компактное множество $M \subseteq L(H)$ такое, что $\forall x \in B_R = \{x \mid \|x\| \leq R\} : u''(x) \in M$; 2.) $u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на ограниченных подмножествах в H. В банаховом пространстве $C_{bound}(H)$ ограниченных непрерывных на H функций ($\|\varphi\| = \sup_H |\varphi(\cdot)|$) рассмотрим линейное многообразие $\mathfrak{A}_{bound} = \{\varphi \in \mathfrak{A} \mid \varphi, \varphi', \varphi''$ - ограничены и равномерно непрерывны на $H\}$. $\widetilde{X}$ - замыкание $\mathfrak{A}_{bound}$ в $C_{bound}(H)$. Обозначим через $B_C(H)$ пространство самосопряжённых ограниченных операторов в H. Пусть $j \in (B_C(H))^*$. Функционал j называется положительным, если $(\forall D \geq 0) : j(D) \geq 0$. Обозначим через J конус всех положительных функционалов. В соответствии с [3] назовём функционал j существенно бесконечномерным, если в его ядро входят все операторы конечного ранга. В [2] доказано, что всякий положительный функционал $j \in (B_C(H))^*$ можно представить в виде: $j = j_1 + j_2$, где $j_1(\cdot) = SpD(\cdot)$, где $D \geq 0$ - ядерный, а j_2 - существенно бесконечномерный положительный, причём такое разложение единственно. Функционал $SpD(\cdot) : B_C(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ действует по правилу: $SpD(C) = SpDC$. В пространстве $\widetilde{X}$ рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор $L = L^j$ с областью определения $\mathfrak{A}_{bound}$: $(L\varphi)(x) = (L^j\varphi)(x) = \frac{1}{2}j(\varphi''(x)$ $(x \in H)$. В [2] доказано, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound} :\ L\varphi \in \widetilde{X}$. В соответствии с [2] такой оператор L будем называть нерегулярным, если j не может быть представлен в виде $SpD(\cdot)$. Нерегулярный оператор имеет вид $(L\varphi)(x) = \frac{1}{2}SpD\varphi''(x) + \frac{1}{2}\omega(\varphi''(x))$, где $D \geq 0$ - положительный ядерный оператор, а ω - положительный существенно бесконечномерный функционал. При этом $\|\omega\| = \|j\| - SpD$. В [2] с каждым положительным линейным функционалом $j \in J$ была связана (C_0) - полугруппа сжатия $T = T^j$ в пространстве $\widetilde{X}$. Результатом действия оператора $T^j(t)$ на функцию $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ является решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}j(u''_{xx}(t,x))$ в точке t с начальным условием φ в нуле. В [2] доказано, что такое решение существует, единственно и принадлежит $\widetilde{X}$, а так же, что линейное многообразие $\mathfrak{A}_{bound}$ инвариантно относительно операторов $T^j(t)$. Оператор L допускает замыкание и при этом $\bar{L} = T'(0)$ ($T'(0)$ - генератор полугруппы $T(t)$).

2. Рассмотрим в пространстве функций $\widetilde{X}$ следующее уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = L_x^{j(t)}u(t,x), \tag{1}$$

где $L^{j(t)} : \mathfrak{A}_{bound} \longrightarrow \widetilde{X}$; $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound} :\ (L^{j(t)}\varphi)(x) = \frac{1}{2}j(t)(\varphi''(x))$, $t \in [0,T]$. Всюду дальше будем считать, что функция $j(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,T]$:

$$(\exists C \geq 0)\ (\forall t_1, t_2 \in [0,T]: \quad \|j(t_1) - j(t_1)\| \leq C \mid t_1 - t_2 \mid). \tag{2}$$

Пусть $U(t,s) = T^{j(s)}(t-s)$, где $s \leq t$. Если $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,T]$ и $t, s \in [0,T]$, причём $t_{j-1} < s \leq t_j < t_m \leq t < t_{m+1}$, положим по определению $U_q(t,s) = U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,s)$.

Теорема 1. *Задача Коши для уравнения (1) с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ в пространстве $\widetilde{X}$ имеет и при том единственное решение. Соответствующее эволюционное семейство $\widetilde{U}(t,\tau)$ является сильным пределом по направлению, которое образуют разбиения q отрезка $[0,T]$:*

$$\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала докажем, что решение, в случае его существования, единственно. Для этого заметим, что в правой части уравнения (1) стоят замыкаемые операторы $L^{j(t)}$ с общей областью определения $\mathfrak{A}_{bound}$. Полугруппы $T^{j(t)}$ являются сжимающими. Согласно теореме Хилле-Иосиды $\forall \lambda > 0 :\ \|R_{\bar{L}^{j(t)}}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, где $R_{\bar{L}^{j(t)}}(\cdot)$ - резольвента оператора $\bar{L}^{j(t)}$. Доказательство того, что существует не более одного решения задачи Коши для уравнения (1) проводится по аналогии с доказательством теоремы 3.10 главы 2 [4], с тем отличием, что операторы в правой части (1) не являются замкнутыми, а только допускают замыкание.

Доказательство того, что решение в пространстве $\widetilde{X}$ существует и имеет вид (3) проводится на базе теоремы 2.1 и утверждения 2.2 главы 6 [5]. В качестве всюду плотного в $\widetilde{X}$ и инвариантного относительно всех операторов семейства $U_q(t,\tau)$ ($q \in \{q\}$; $t,\tau \in [0,T]$) множества возьмём $\mathfrak{A}_{bound}$. Инвариантность $\mathfrak{A}_{bound}$ относительно операторов семейства $U_q(t,\tau)$ ($q \in \{q\}$; $t,\tau \in [0,T]$) немедленно вытекает из определения $U_q(t,\tau)$, а так же из инвариантности этого множества относительно операторов $T^{j(\cdot)}(\cdot)$. Далее $\forall q \in \{q\}$, $\forall t,\tau \in [0,T] :\ \|U_q(t,\tau)\| \leq 1$. Проанализировав доказательство леммы1 из [3], приходим к выводу, что имеет место равенство:

$$\forall j_1, j_2 \in J,\ \forall \psi \in \mathfrak{A}_{bound} :\ \ T^{j_2}(t)\psi - T^{j_1}(t)\psi = t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2 - L_1)\psi d\alpha, \tag{4}$$

где операторы $L_1 = L^{j_1}$ и $L_2 = L^{j_2}$ таковы, что $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ - генераторы полугрупп T^{j_1} и T^{j_2} в пространстве $\widetilde{X}$. С использованием (4), совершенно аналогично тому как это сделано в теореме1 [1], доказывается, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ и любых $0 \leq s \leq \theta \leq t \leq T$ верна такая оценка: $\|U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi\| \leq C \cdot \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\|(t-\theta)(\theta-s)$, где C - константа из (2). В [2] доказано, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ и для любых векторов $h_1, h_2 \in H$ $(\varphi''(\cdot)h_1, h_2) \in \widetilde{X}$, и при этом $\forall j \in J :\ \ ((T^j(t)\varphi)(\cdot)h_1, h_2) = T^j(t)(\varphi''(\cdot)h_1, h_2)$. Отсюда нетрудно получить, что $\forall j \in J, \forall t \in [0,T] \quad \sup_{x\in H}\|(T^j(t)\varphi)''(x)\| \leq \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\|$. Последовательное применение этого утверждения приводит к тому, что

$$\sup_{q,t,s}\sup_{x\in H}\|(U_q(t,s)\varphi)''(x)\| \leq \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\| < +\infty, \tag{5}$$

поскольку $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$. Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы1 из [1].

3. Теперь перейдём к изучению некоторых сойств решения задачи Коши для уравнения (1). Под задачей Коши в треугольнике $T_\Delta = \{(t,s) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$ для уравнения (1) понимаем задачу про нахождение решения уравнения (1) на отрезке $[s,T]$ при каждом фиксированном $s \in [0,T)$ с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ в точке s. Согласно теореме1 такое решение существует и единственно. Поэтому корректно определён линейный оператор $\widetilde{U}(t,s) : \varphi \mapsto$ решение (1) на отрезке $[s,T]$ с начальным условием φ в точке s.

Теорема 2. *Решение задачи Коши в треугольнике T_Δ для уравнения (1) является непрерывной функцией по совокупности переменных $(t,s) \in T_\Delta$. Решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из равномерной сходимости $\varphi_m \in \mathfrak{A}_{bound}$ к нулю вытекает равномерная по $(t,s) \in T_\Delta$ сходимость к нулю соответствующих решений $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi_m$.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.1 главы 6 [5] следует, что $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$ сходимость $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi$ является равномерной по $(t,\tau) \in T_\Delta$. Поэтому для доказательства непрерывности $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi$ по $(t,\tau) \in T_\Delta$ достаточно доказать непрерывность $U_q(t,\tau)\varphi$ при каждом фиксированном разбиении q. Итак, пусть $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,T]$, причём $t_{j-1} < \tau < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_m < t < t_{m+1}$. Тогда $U_q(t,\tau)\varphi = U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau)\varphi$, и при достаточно малых Δt и $\Delta\tau$ имеет место равенство $U_q(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)\varphi = U(t+\Delta t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi$. Пусть $\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) = U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$; $\widetilde{\psi}_2(\Delta\tau) = U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,\tau)\varphi \in \mathfrak{A}_{bound}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|U_q(t+\Delta t,\tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t,\tau)\varphi\| = \|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_2\| \le \\ &\le \|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| + \|U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_2\| \le \\ &\le \|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| + \|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\|. \end{aligned} \tag{6}$$

Оценим каждое слагаемое в (6). Начнём со второго. Пусть $\Delta\tau < 0$ (случай $\Delta\tau \ge 0$ рассматривается абсолютно аналогично). Вспоминая как определяются операторы $U(\cdot,\cdot)$, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} &\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \le \|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi\| + \\ &+ \|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\|, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\psi_{\Delta\tau} = T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi$. Оценим первое слагаемое в (7).

$$T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi = \int\limits_0^{-\Delta\tau} \frac{d}{ds}T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s)\varphi ds = \int\limits_0^{-\Delta\tau} T^{j(\tau+\Delta\tau)}(s)L^{j(\tau+\Delta\tau)}\varphi ds. \tag{8}$$

Из (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi - T^{j(\tau+\Delta\tau)}(0)\varphi\| \le \int\limits_0^{-\Delta\tau} \|L^{j(\tau+\Delta\tau)}\varphi\| ds \le \\ &\le \frac{1}{2} \mid \Delta\tau \mid \|j(\tau+\Delta\tau)\| \cdot \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\| \to 0, \quad \text{при } \Delta\tau \to 0-, \end{aligned} \tag{9}$$

поскольку $\|j(\tau+\Delta\tau)\| \to \|j(\tau)\|$, $\Delta\tau \to 0-$. Последнее имеет место, поскольку $j(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,T]$, а потому непрерывна. Сделаем теперь оценку второго слагаемого в (7). Используя (4) будем иметь:

$$\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\| \le \mid t_j-\tau \mid \cdot \|(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)})\psi_{\Delta\tau}\|. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\mid ((L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)})\psi_{\Delta\tau})(x) \mid = \frac{1}{2} \mid (j(\tau+\Delta\tau) - j(\tau))(\psi''_{\Delta\tau}(x)) \mid \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\|j(\tau+\Delta\tau) - j(\tau)\| \cdot \|\psi''_{\Delta\tau}(x)\| \leq \frac{1}{2}C \mid \Delta\tau \mid \cdot \sup_{x\in H}\|\psi''_{\Delta\tau}(x)\|.
\end{aligned} \tag{11}$$

Так как $\psi_{\Delta\tau} = T^{j(\tau+\Delta\tau)}(-\Delta\tau)\varphi$, можем написать, используя (11) и равенство, при помощи которого получили (5):

$$\|(L^{j(\tau+\Delta\tau)} - L^{j(\tau)})\psi_{\Delta\tau}\| \leq \frac{1}{2}C \mid \Delta\tau \mid \cdot \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\|.$$

Из этого неравенства, а так же из (10) следует, что $\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\| \leq const \cdot |\Delta\tau| \cdot \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\|$, откуда

$$\|T^{j(\tau+\Delta\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau} - T^{j(\tau)}(t_j-\tau)\psi_{\Delta\tau}\| \to 0 \quad \text{при } \Delta\tau \to 0- . \tag{12}$$

Из (7), (9), (12) делаем вывод, что $\|U(t_j, \tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \to 0$ при $\Delta\tau \to 0-$. Абсолютно аналогично доказывается, что $\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \to 0$ при $\Delta\tau \to 0+$. Стало быть, окончательно

$$\|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\| \to 0 \quad \text{при } \Delta\tau \to 0. \tag{13}$$

Снова вернёмся к неравенству (6) и сделаем оценку первого слагаемого, стоящего в правой части.

$$\begin{aligned}
&\|U(t+\Delta t, t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| = \|T^{j(t_m)}(t+\Delta t - t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - \\
&- T^{j(t_m)}(t-t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\|.
\end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку полугруппа $T^{j(t_m)}$ является сильно непрерывной. Значит,

$$s - \lim_{(\Delta t,\Delta\tau)\to(0,0)} T^{j(t_m)}(t+\Delta t - t_m) = T^{j(t_m)}(t-t_m). \tag{15}$$

Далее можем написать, что

$$\lim_{(\Delta t,\Delta\tau)\to(0,0)} \widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) = U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau)\varphi. \tag{16}$$

Действительно, согласно определению $\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)$ и согласно свойствам операторов $U(\cdot,\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau)\varphi\| = \\
&= \|U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_m,t_{m-1})U(t_{m-1},t_{m-2})\dots U(t_j,\tau)\varphi\| \leq \\
&\leq \|U(t_j,\tau+\Delta\tau)\varphi - U(t_j,\tau)\varphi\|,
\end{aligned}$$

откуда, используя (13) и получим (16). Из равентства (14), учитывая (15) и (16) заключаем, что

$$\|U(t+\Delta t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau) - U(t,t_m)\widetilde{\psi}_1(\Delta\tau)\| \to 0 \quad \text{при } (\Delta t,\Delta\tau) \to 0. \tag{17}$$

Из неравенства (6), учитывая (17) и (13), делаем окончательный вывод $\|U_q(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau)\varphi - U_q(t,\tau)\varphi\| \to 0$ при $(\Delta t,\Delta\tau) \to (0,0)$. Итак, доказана непрерывность $U_q(t,\tau)\varphi$ по $(t,\tau) \in T_\Delta$ при каждом фиксированном разбиении q, а поэтому и непрерывность по $(t,\tau) \in T_\Delta$ функции $\widetilde{U}(t,\tau)\varphi$. Перейдём ко второй части теоремы. Пусть $\varphi_m \in \mathfrak{A}_{bound}$ и $\|\varphi_m\| \to 0$. Нам нужно доказать, что $\|\widetilde{U}(t,\tau)\varphi_m\| \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по $(t,\tau) \in T_\Delta$. Отметим, что $\forall q \in \{q\}, \forall(t,\tau) \in T_\Delta : \ \|U_q(t,\tau)\| \leq 1$, то есть семейство операторов $U_q(t,\tau)$ является равномерным в терминологии [5]. Из предложения 2.1 главы 6 [5] следует, что семейство $\widetilde{U}(t,\tau)$, $((t,\tau) \in T_\Delta)$ так же является равномерным. Поэтому $(\exists C_1 > 0)(\forall(t,\tau) \in T_\Delta, \forall m \in \mathbb{N}) : \ \|\widetilde{U}(t,\tau)\varphi_m\| \leq C_1 \cdot \|\varphi_m\|$. Отсюда сразу же получаем требуемый результат.

Сделаем в конце одно важное замечание. В этой статье для построения эволюционных семейств, дающих решение задачи Коши, используется техника, предложенная в [5]. Существует однако другой подход к построению эволюционных семейств, когда в правой части соответствующего дифференциального уравнения находятся замкнутые операторы, которые имеют общую всюду плотную область определения и являются генераторами некоторых (C_0) - полугрупп сжатия. Этот подход рассматривается в [4]. Он оказывается неприемлемым в случае построения решений задачи Коши для уравнения (1). Это объясняется тем, что в правой части (1) стоят операторы с общей, всюду плотной областью определения и только допускают замыкание (не являются замкнутыми). Если же мы рассмотрим замыкания этих операторов, то они уже не будут иметь общей области определения.

Список литературы

[1] Мальцев А.Ю. *Задача Коши для уравнения с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором, зависящим от времени*//Учёные записки таврического национального университета им. Вернадского.—2002.–т15(54), №1.–с.107-111.

[2] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором*//Укр. мат. журн.—1989.–т41, №5.–с.584-590.

[3] Богданский Ю.В. *Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами*//Укр. мат. журн.—1994.–т46, №6.–с.663-670.

[4] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* М.:Наука, 1967.—464 с.

[5] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах* М.:Наука, 1983.—384 с.

А. Ю. Мальцев, Национальный Технический Университет Украины 'КПИ', Киев, Украина

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПО МЕРЕ

И. В. Орлов
Таврический национальный университет им.В. И. Вернадского,
Симферополь, Украина

Введение

Формула Лагранжа для отображений отрезка в локально выпуклое пространство (ЛВП): $f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B$ (при локальной оценке $f'(x) \in g'(x) \cdot B$, где B замкнуто и выпукло) служит, как и ее классический прототип, фундаментом дифференциального исчисления как в банаховых, так и в более общих классах пространств [1]–[5]. В работах автора [6]–[8] формула Лагранжа обобщалась на случай несчетного, вообще говоря, исключительного множества $e \subset [a; b]$, на котором отсутствует оценка производной $f'(x)$. При этом основная оценка приняла интегральную форму

$$f(b) - f(a) \in \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)\, dt \cdot B \tag{1}$$

(при локальной оценке $f'(x) \in \varphi(x) \cdot B$, $x \in [a; b]\setminus e$; см. ниже, п.1).

Естественной теперь представляется задача обобщения оценки (1) с использованием интеграла Лебега по мере, более общей, чем классическая. Целью данной работы является решение данной задачи. Работа состоит из трех частей.

В первой части приводится значительно более простая и подходящая для дальнейших целей схема доказательства формулы (1). Во второй части работы ряд фактов, относящихся к классической мере Лебега на прямой, распространяется на более широкий класс мер.

В третьей, основной части работы, на базе предшествующих результатов, обобщенная формула Лагранжа переносится на производные по мере (теоремы 3.1–3.2): для конечных борелевских непрерывных мер μ на $[a; b]$, подчиненных классической мере Лебега: $m \ll \mu$, из локальной оценки производной по мере $f'_\mu(x) \in \varphi(x) \cdot B$, $x \in [a; b]\setminus e$, вытекает глобальная оценка:

$$f(b) - f(a) \in \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(x)\, d\mu(x) \cdot B.$$

Результаты переносятся на отображения отрезка в линейные индуктивные шкалы ЛВП. Отметим, что введенные в работе производные функций по мере близки по духу к обобщенным производным по направлению [9]–[12], находящим в последнее время широкие применения в выпуклом анализе и теории оптимального управления (см. также [13]).

Это позволяет рассчитывать на перспективы дальнейших исследований по следующим направлениям. Во-первых, дальнейшее развитие дифференциального исчисления для производных по мере вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов. Во-вторых, перенос на производные по мере конструкций слабого и сильного дифференциального исчисления в ЛВП [14]–[16] с последующими приложениями в вариационных задачах и выпуклом анализе.

1. Новое доказательство обобщенной формулы конечных приращений

Доказательство классической формулы конечных приращений для вещественных функций (1) со счетным исключительным множеством $e = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ использует, как известно, [1], вспомогательную функцию скачков

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot \sum_{n\colon x_n < x} \frac{1}{2^n}; \quad (\varepsilon > 0).$$

В случае несчетного исключительного множества e мы свяжем конструкцию функции скачков с покрытием его образа $f(e)$ системой интервалов с произвольно малой суммой длин.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $[a;b]\backslash e$, где $e \subset [a;b]$ m-измеримо и $mf(e) = 0$. Если $f'(x) \leqslant \varphi(x)$ при $x \in [a;b]\backslash e$, где функция $\varphi(x)$ неотрицательна и m-суммируема на $[a;b]\backslash e$, то*

$$f(b) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [a;b]\backslash e$, $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ при $x \in e$. Положим

$$\Phi(x) = \int\limits_{[a;x]\backslash e} \varphi(t)\, dt = \int\limits_a^x \widetilde{\varphi}(t)\, dt.$$

По теореме Лебега о дифференцировании по верхнему пределу [17], $\Phi'(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ почти всюду на $[a;b]$, откуда $\Phi'(x) = \varphi(x)$ почти всюду на $[a;b]\backslash e$. Таким образом, если e_1 — множество точек из $[a;b]\backslash e$, в которых не выполнено равенство $\Phi'(x) = \varphi(x)$, то $me_1 = 0$. Поскольку f, ввиду дифференцируемости, обладает на $[a;b]\backslash e$ N-свойством Лузина, то $mf(e_1) = 0$, откуда $mf(e \cup e_1) = 0$.

Фиксировав $\varepsilon > 0$, выберем покрытие $f(e \cup e_1)$ системой непересекающихся интервалов:

$$\bigcup_n (\alpha_n; \beta_n) \supset f(e \cup e_1); \qquad \sum_n (\beta_n - \alpha_n) =: \sum_n \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Обозначая $x_n = \sup f^{-1}((\alpha_n; \beta_n))$, положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{n\colon x_n \leqslant x} \varepsilon_n.$$

Очевидно, функция $\varphi_\varepsilon(x)$ возрастает, непрерывна справа и имеет скачки ε_n в точках x_n. Докажем, что для любого $x' \in [a;b]$ найдется такой $x \geqslant x'$, что

$$f(x) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;x]\backslash e} \varphi(t)\, dt + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть U — множество точек из $[a;b]$, для которых (3) неверно, т.е.

$$(x' \in U) \Leftrightarrow (\forall\, x \geqslant x' : \; f(x) - f(a) > \int\limits_{[a;x]\backslash e} \varphi(t)\, dt + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon). \tag{4}$$

Очевидно, U — отрезок в $[a;b]$. Пусть $U \neq \varnothing$, $c = \inf U$. Т.к. найдется такая последовательность $x_k \to c - 0$, для которой (3) выполнено, то, переходя в (3) к пределу при $x = x_k \to c - 0$ и учитывая, что $\varphi_\varepsilon(c - 0) \leqslant \varphi_\varepsilon(c)$, получим (3) при $x = c$. Таким образом, $c \notin U$ и $U = (c; b]$. Рассмотрим два возможных случая положения точки c.

а). Если $c \notin e \cup e_1$, то существуют $f'(c)$ и $\Phi'(c)$, причем $\Phi'(c) = \varphi(c)$. Найдем такой интервал $c < x < c + \delta$, в котором

$$f'(c) \geqslant \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{\varepsilon}{2}; \qquad \varphi(c) \leqslant \frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, с учетом $f'(c) \leqslant \varphi(c)$, находим

$$f(x) - f(c) \leqslant \Phi(x) - \Phi(c) + \varepsilon(x - c). \tag{5}$$

Далее, т.к. $c \notin U$, то (4) неверно при некотором $x \geqslant c$. Но поскольку (4) верно при $x > c$, то (4) неверно при $x = c$:

$$f(c) - f(a) \leqslant \Phi(c) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(c) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon. \tag{6}$$

Складывая (5) и (6), с учетом монотонности φ_ε, получаем:

$$f(x) - f(a) \leqslant \Phi(x) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon$$

при $x \in [c; c + \delta)$, что противоречит определению точки c.

б). Если $c \in e \cup e_1$, то $c \in f^{-1}((\alpha_{n_0}; \beta_{n_0}))$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $x \in f^{-1}((\alpha_{n_0}; \beta_{n_0}))$:

$$f(x) - f(c) < \beta_{n_0} - \alpha_{n_0} = \varepsilon_{n_0}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \to x_{n_0} = \sup f^{-1}((\alpha_{n_0}; \beta_{n_0}))$ с учетом непрерывности f, получим

$$f(x_{n_0}) - f(c) \leqslant \varepsilon_{n_0}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует

$$\begin{aligned} f(x_{n_0}) - f(a) &\leqslant [\Phi(c) - \Phi(a)] + [\varphi_\varepsilon(c) + \varepsilon_{n_0}] + [\varepsilon(c - a) + \varepsilon] < \\ &< \Phi(x_{n_0}) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(x_{n_0}) + \varepsilon(x_{n_0} - a) + \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. (3) выполнено при $x = x_{n_0} > c$, что противоречит определению U. Таким образом, $U = \varnothing$.

Полагая теперь $x = b$ в (3) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (2).□

Переход от вещественных функций к отображениям отрезка в ЛВП осуществляется по стандартной схеме [3], [7]. Сформулируем этот результат.

Теорема 1.2. *Пусть E — отделимое вещественное ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество E, отображение $f : [a; b] \to E$ непрерывно на $[a; b]$ и дифференцируемо на $[a; b] \backslash e$, где $e \subset [a; b]$ m-измеримо, и множество $f(e)$ имеет скалярную m-меру нуль в E. Если $f'(x) \in \varphi(x) \cdot B$ при $x \in [a; b] \backslash e$, где функция $\varphi(x)$ неотрицательна и m-суммируема на $[a; b] \backslash e$, то*

$$f(b) - f(a) \in \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, dx \cdot B.$$

2. Обобщенные теоремы Витали, Лебега и Сакса

В этом разделе мы обобщим ряд известных фактов, связанных с классической мерой Лебега на прямой, на более широкий класс мер. Целью такого обобщения является последующий перенос (в п. 3) формулы конечных приращений на производные по мере.

Определение 2.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, M — некоторая система невырожденных сегментов в $\mathbb{R}$, μ — мера в $\mathbb{R}$. Если для всякой точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой сегмент $d \in M$, что $x \in d$ и $\mu(d) < \varepsilon$, то систему M назовем *μ-покрытием Витали* множества E.

Теорема 2.2 (Обобщенная теорема Витали)**.** *Пусть μ — непрерывная борелевская мера в $\mathbb{R}$ и M — μ-покрытие Витали ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}$. Если m абсолютно непрерывна относительно μ: $m \ll \mu$, то из системы M можно выделить подсистему попарно непересекающихся сегментов, покрывающую μ-почти все E.*

Доказательство. Пусть $E \subset (a;b)$. Следуя классической схеме доказательства [17], удалим из M те сегменты, которые целиком не содержатся в $(a;b)$. Т.к. $m \ll \mu$, то оставшаяся система M_0 также образует μ-покрытие Витали для E.

Пусть $d_1 \in M_0$. Если $E \subset d_1$, то теорема доказана. По индукции, если $d_1, d_2, \dots, d_n$ уже выбраны и не пересекаются, и

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} d_k =: E \setminus F_n \neq \varnothing, \tag{8}$$

рассмотрим все сегменты из M_0, содержащиеся в $G_n = (a;b) \setminus F_n$. В силу (8), такие сегменты существуют и их μ-меры ограничены мерой $\mu((a;b))$. Если k_n — точная верхняя грань этих мер, то обозначим d_{n+1} тот из сегментов, для которого

$$\mu(d_{n+1}) > \frac{1}{2} k_n. \tag{9}$$

Ясно, что сегмент d_{n+1} не пересекается с предыдущими. Если процесс построения бесконечен (иначе теорема доказана), то последовательность $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ — искомая.

Действительно, пусть $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$. Т.к. E ограничено, то можно считать, что $\mu(\mathbb{R}_+) = \mu(\mathbb{R}_-) = \infty$. Это позволяет выбрать для каждого $n = 1, 2, \dots$ сегмент D_n, концентричный с d_n, так, чтобы

$$\mu(D_n^{\pm}) = 3\mu(d_n), \tag{10}$$

где $D_n^{\pm}$ — соответственно, правые и левые половины отрезков D_n. В частности,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) < +\infty. \tag{11}$$

Поэтому для доказательства равенства $\mu(E \setminus S) = 0$ достаточно проверить, что для любого $k = 1, 2, \dots$ верно

$$E \setminus S \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} D_k.$$

Если $x \in E \setminus S$, то $x \in G_k$, и т.к. G_k открыто и $m \ll \mu$, то найдется такой $d \in M_0$, что $x \in d \subset G_k$. Если при этом допустить, что $d \subset G_n$ для любого n, то $\mu(d) \leqslant k_n \leqslant 2\mu(d_{n+1})$, что невозможно, т.к., в силу (11), $\mu(d_n) \to 0$. Таким образом, при некотором $n \geqslant k$:

$$d \cap F_n \neq \varnothing. \tag{12}$$

Пусть n — наименьшее из чисел, удовлетворяющих (12). Т.к. $d \cap F_i = \varnothing$ и $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, то $n > i$. Следовательно, $d \cap F_{n-1} = \varnothing$, откуда

$$d \cap d_n \neq \varnothing; \tag{13}$$

$$d \subset G_{n-1}, \quad \text{и значит} \quad \mu(d) \leqslant k_{n-1} < 2\mu(d_n). \tag{14}$$

Из (14) следует $\mu(d_n \cup d) \leqslant 3\mu(d_n)$, поэтому из (13) и (10) вытекает $(d_n^{\pm} \cup d) \subset D_n^{\pm}$, откуда $d \subset D_n$. Следовательно, $x \in \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} D_k$, ч.т.д.$\square$

Прежде чем сформулировать обобщенную теорему Лебега, напомним определение производной функции по мере (или μ-производной):

$$\frac{dF}{d\mu}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{\mu([x;x+h])}; \tag{15}$$

при этом для $h < 0$ мы полагаем $\mu([x;x+h]) := -\mu([x+h;x])$. Через $(\frac{dF}{d\mu})^*$ и $(\frac{dF}{d\mu})_*$ обозначим соответствующие верхнюю и нижнюю производную.

Теорема 2.3 (Обобщенная теорема Лебега). *Пусть μ — конечная непрерывная борелевская мера на $[a;b]$, $m \ll \mu$ и функция f μ-суммируема на $[a;b]$, тогда*

$$\frac{d}{d\mu}\int\limits_a^x f(t)\,d\mu(t) = f(x)\,(\mathrm{mod}\mu). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,d\mu(t)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Для любых $p < q$ положим

$$E_{pq} = \left\{ x \in [a;b] \;\middle|\; f(x) < p < q < \left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)^{*}(x) \right\}.$$

Очевидно, E_{pq} μ-измеримо. Докажем, что $\mu E_{pq} = 0$.

Используя абсолютную непрерывность интеграла по мере μ и непрерывность μ, для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что

$$(\mu(e) < \delta) \Rightarrow \left(\left| \int\limits_e f(t)\,d\mu(t) \right| < \varepsilon \right), \tag{17}$$

и такое открытое G, $[a;b] \supset G \supset E_{pq}$, что $\mu G < \mu E_{pq} + \delta$.

Для любого $x \in E_{pq}$ найдутся как угодно малые h, для которых:

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{\mu([x;x+h])} > q. \tag{18}$$

Система $\{[x;x+h]\}$, где $x \in E_{pq}$ и h удовлетворяет (18), образует μ-покрытие Витали E_{pq}; при этом можно считать, что $[x;x+h] \subset G$. По теореме 2.2 можно выделить подсистему $\{[x_k;x_k+h_k]\}_{k=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся сегментов так, чтобы

$$\mu\left(E_{pq} \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty}[x_k;x_k+h_k]\right) = 0.$$

При этом, ввиду (18),

$$\frac{1}{\mu([x_k;x_k+h_k])}\int\limits_{x_k}^{x_k+h_k} f(t)\,d\mu(t) > q.$$

Отсюда, полагая $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[x_k;x_k+h_k]$, получаем:

$$\int\limits_S f(t)\,d\mu(t) > q\mu(S) \geqslant q \cdot \mu E_{pq}. \tag{19}$$

Далее, т.к. $\mu(S\backslash E_{pq}) \leqslant \mu(G\backslash E_{pq}) < \delta$, то из (17) следует

$$\int\limits_{S\backslash E_{pq}} f(t)\,d\mu(t) < \varepsilon,$$

откуда

$$\int\limits_S f(t)\,d\mu(t) < \int\limits_{E_{pq}} f(t)\,d\mu(t) + \varepsilon. \tag{20}$$

Наконец, из определения E_{pq} вытекает

$$\int\limits_{E_{pq}} f(t)\,d\mu(t) \leqslant p \cdot \mu E_{pq}. \tag{21}$$

Из (19), (20) и (21) получаем $q \cdot \mu E_{pq} < p \cdot \mu E_{pq} + \varepsilon$, откуда $q \cdot \mu E_{pq} \leqslant p \cdot \mu E_{pq}$, т.е. $\mu E_{pq} = 0$. Отсюда, обозначая $E = \{x \in [a;b] \,\Big|\, \left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)^* (x) > f(x)\}$, имеем $\mu E = 0$. Таким образом,

$$\left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)^* \leqslant f(x)\,(\mathrm{mod}\mu). \tag{22}$$

Заменяя в предыдущих рассуждениях $f(x)$ на $[-f(x)]$, аналогично получим неравенство

$$f(x) \leqslant \left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)_* (x)\,(\mathrm{mod}\mu) \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что μ-почти всюду на $[a;b]$ существует $d\Phi/d\mu$ и выполнено равенство (16).□

Теорема 2.4 (Обобщенная лемма Сакса [18]). *Пусть μ — борелевская регулярная мера в $\mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $\mu(E) < +\infty$, функция F μ-дифференцируема на E. Для каждого $k \geqslant 0$ положим*

$$E_k = \{x \in E \,\Big|\, |\frac{dF}{d\mu}(x)| \leqslant k\}.$$

Тогда:

$$mF(E_k) \leqslant k \cdot \mu(E_k). \tag{24}$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем такое компактное подмножество $C_{kn} \subset E_k$ и открытое множество $U_{kn} \supset E_k$, чтобы $\mu\,(U_{kn} \backslash C_{kn}) < 1/n$. Далее, фиксируя $\varepsilon > 0$ и пользуясь определением μ-производной, для каждой точки $x \in C_{kn}$ найдем такое $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, чтобы $O_\delta(x) \subset U_{kn}$ и при $0 < |h| < \delta$:

$$|F(x+h) - F(x)| < (k+\varepsilon) \cdot \mu([x; x+h]).$$

Отсюда следует

$$mF(A) < (k+\varepsilon) \cdot \mu(A) \quad \text{при} \quad A \subset O_\delta(x). \tag{25}$$

Выделим из покрытия $\{O_\delta(x) |\, x \in C_{kn}\}$ конечное покрытие $\{O_{\delta_i}\}_{i=1}^m$ множества C_{kn} и заменим его системой непересекающихся множеств

$$I(x_i) = O_{\delta_i}(x_i) \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} O_{\delta_j}(x_j); \quad (i = \overline{1,m})$$

с тем же объединением. Применяя (25) к $I(x_i)$, имеем:

$$mF(C_{kn}) \leqslant \sum_{i=1}^m mF(I(x_i)) < (k+\varepsilon) \cdot \sum_{i=1}^m \mu(I(x_i)) =$$

$$= (k+\varepsilon) \cdot \mu\left(\bigcup_{i=1}^m O_{\delta_i}(x_i)\right) \leqslant (k+\varepsilon) \cdot \mu(U_{kn}) < (k+\varepsilon) \cdot \left(\mu E_k + \frac{1}{n}\right),$$

откуда в пределе получаем (24).□

Определение 2.5. Будем говорить, что вещественная функция F обладает μ-свойством Лузина на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если $(A \subset E, \mu(A) = 0) \Rightarrow (mF(A) = 0)$.

Следствие 2.6. *Если μ — борелевская регулярная мера в $\mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $\mu(E) < +\infty$, то всякая μ-дифференцируемая на E функция обладает μ-свойством Лузина.*

Доказательство. В обозначениях теоремы 2.4, применяя (24), имеем для любого μ-измеримого подмножества $A \subset E$:

$$mF(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^\infty F(A \cap E_k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^\infty k \cdot \mu F(A \cap E_k),$$

откуда следует $mF(A) = 0$ при $\mu(A) = 0$.□

3. Формула конечных приращений для производных по мере

Теорема 3.1. *Пусть μ — конечная непрерывная борелевская мера на $[a;b]$, $m \ll \mu$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, μ-дифференцируема на $[a;b]\backslash e$ и $mf(e) = 0$. Если $f'_\mu(x) \leqslant \varphi(x)$ при $x \in [a;b]\backslash e$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и μ-суммируема на $[a;b]\backslash e$, то*

$$f(b) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, d\mu(x). \tag{26}$$

-

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 1.1, введем функцию $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [a;b]\backslash e$, $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ при $x \in e$, и положим

$$\Phi(x) = \int\limits_{[a;x]\backslash e} \varphi(t)\, d\mu(t) = \int\limits_a^x \widetilde{\varphi}(t)\, d\mu(t).$$

По обобщенной теореме Лебега 2.3, $\Phi'_\mu(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ μ-почти всюду на $[a;b]$, откуда $\Phi'_\mu(x) = \varphi(x)$ μ-почти всюду на $[a;b]\backslash e$. Таким образом, если e_1 — множество точек из $[a;b]\backslash e$, в которіх не выполнено равенство $\Phi'_\mu(x) = \varphi(x)$, то $\mu(e_1) = 0$. Поскольку, ввиду μ-дифференцируемости, по следствию 2.6, f обладает на $[a;b]\backslash e$ μ-свойством Лузина, то $mf(e_1) = 0$, откуда $mf(e \cup e_1) = 0$.

Фиксировав $\varepsilon > 0$, выберем покрытие $f(e \cup e_1)$ системой непересекающихся интервалов:

$$\bigcup_n (\alpha_n, \beta_n) \supset f(e \cup e_1); \qquad \sum_n (\beta_n - \alpha_n) =: \sum_n \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Обозначая $x_n = \sup f^{-1}\left((\alpha_n, \beta_n)\right)$, положим $\varphi_\varepsilon(x) = \sum\limits_{n:\, x_n \leqslant x} \varepsilon_n$.

Очевидно, функция $\varphi_\varepsilon(x)$ возрастает, непрерывна справа и имеет скачки ε_n в точках x_n. Докажем, что для любого $x' \in [a;b]$ найдется такой $x \geqslant x'$, что

$$f(x) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;x]\backslash e} \varphi(t)\, d\mu(t) + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon \cdot \mu\left([a;x]\right) + \varepsilon. \tag{27}$$

Пусть U — множество точек из $[a;b]$, для которых (27) неверно, т.е.

$$(x' \in U) \Leftrightarrow \left(\forall\, x \geqslant x' :\ f(x) - f(a) > \int\limits_{[a;x]\backslash e} \varphi(t)\, d\mu(t) + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon \cdot \mu\left([a;x]\right) + \varepsilon\right). \tag{28}$$

Очевидно, U — отрезок в $[a;b]$. Пусть $U \neq \varnothing$, $c = \inf U$. Т.к. найдется такая последовательность $x_k \to c - 0$, для которой (27) выполнено, то, переходя в (27) к пределу при $x = x_k \to c - 0$ и учитывая непрерывность μ и $\varphi_\varepsilon(c-0) \leqslant \varphi_\varepsilon(c)$, получим (27) при $x = c$. Таким образом, $c \in U$ и $U = (c;b]$. Рассмотрим два возможных случая положения точки c.

а) Если $c \notin e \cup e_1$, то существует $f'_\mu(c)$ и $\Phi'_\mu(c)$, причем $\Phi'_\mu(c) = \varphi(c)$. Найдем такой интервал $c < x < c + \delta$, в котором

$$f'_\mu(c) \geqslant \frac{f(x) - f(c)}{\mu([c;x])} - \frac{\varepsilon}{2}; \quad \varphi(c) \leqslant \frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{\mu([c;x])} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, с учетом $f'_\mu(c) \leqslant \varphi()$, находим

$$f(x) - f(c) \leqslant \Phi(x) - \Phi(c) + \varepsilon \cdot \mu([c;x]). \tag{29}$$

Далее, т.к. $c \notin U$, то (28) неверно при некотором $x \geqslant c$. Но поскольку (28) верно при $x > c$, то (28) неверно при $x = c$:

$$f(c) - f(a) \leqslant \Phi(c) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(c) + \varepsilon \cdot \mu([a;c]) + \varepsilon. \tag{30}$$

Складывая (29) и (30), с учетом монотонности φ_ε, получаем:

$$f(x) - f(a) \leqslant \Phi(x) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon \cdot \mu([a;x]) + \varepsilon$$

при $x \in [c; c+\delta)$, что противоречит определению точки c.

б) Если $c \in e \cup e_1$, то $c \in f^{-1}((\alpha_{n_0}; \beta_{n_0}))$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $x \in f^{-1}((\alpha_{n_0}; \beta_{n_0}))$:

$$f(x) - f(c) < \beta_{n_0} - \alpha_{n_0} = \varepsilon_{n_0}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \to x_0 = \sup f^{-1}((\alpha_{n_0}; \beta_{n_0}))$ с учетом непрерывности f, получим

$$f(x_{n_0}) - f(c) \leqslant \varepsilon_{n_0}. \tag{31}$$

Из (29) и (30) следует:

$$f(x_{n_0}) - f(a) \leqslant [\Phi(c) - \Phi(a)] + [\varphi_\varepsilon(c) + \varepsilon_{n_0}] + [\varepsilon \cdot \mu([a;c]) + \varepsilon] <$$

$$< \Phi(x_{n_0}) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(x_{n_0}) + \varepsilon \cdot \mu([a; x_{n_0}]) + \varepsilon,$$

т.е. (27) выполнено при $x = x_{n_0} > c$, что противоречит определению U. Таким образом, $U = \varnothing$. Полагая теперь $x = b$ в (27) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (26).□

Перенесем теперь полученный результат на отображения отрезка в ЛВП.

Теорема 3.2. *Пусть μ — конечная непрерывная борелевская мера на $[a;b]$, $m \ll \mu$, E — отделимое вещественное ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество E, отображение $f : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$, μ — дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, и множество $f(e)$ имеет скалярную m-меру нуль в E. Если $f'_\mu(x) \in \varphi(x) \cdot B$ при $x \in [a;b]\backslash e$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и μ-суммируема на $[a;b]\backslash e$, то*

$$f(b) - f(a) \in \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, d\mu(x) \cdot B. \tag{32}$$

Доказательство. Допустим, что (32) неверно. Тогда, по следствию из теоремы Хана-Банаха ([19], гл.2, п.2.1) о строгой функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в ЛВП, найдется такой $l \in E^*$, что

$$l(f(b) - f(a)) > \sup l \left(\int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, d\mu(x) \cdot B \right) = \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, d\mu(x) \cdot \sup l(B). \tag{33}$$

Положим $d = \sup l(B)$ (можно считать $d \geqslant 0$), $\widetilde{f}(x) = l(f(x))$, $\widetilde{\varphi}(x) = d \cdot \varphi(x)$. Тогда из условий теоремы следует при $x \in [a;b]\backslash e$:

$$\widetilde{f}'_\mu(x) \in l(\varphi(x) \cdot B) = \varphi(x) \cdot l(B) \leqslant \widetilde{\varphi}(x),$$

причем $m\tilde{f}(e) = ml(f(e)) = 0$. Это позволяет применить к функциям $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ оценку (26):

$$l(f(b) - f(a)) = \tilde{f}(b) - \tilde{f}(a) \leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e} \tilde{\varphi}(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, d\mu(x) \cdot \sup l(B),$$

что противоречит неравенству (33).□

Следствие 3.3 ("Теорема о среднем"для производных по мере)**.** *Пусть μ — конечная непрерывная борелевская мера на $[a;b]$, $m \ll \mu$, E — отделимое вещественное ЛВП, отображение $f:[a;b]\to E$ непрерывно на $[a;b]$, μ-дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, и множество $f(e)$ имеет скалярную m-меру нуль в E. Тогда*

$$f(b)-f(a)\in \mu([a;b]\backslash e)\cdot \overline{\mathrm{conv}}\frac{df}{d\mu}\left([a;b]\backslash e\right). \tag{34}$$

Доказательство. Положим в теореме 3.2 $\varphi(x)\equiv 1$ на $[a;b]\backslash e$, $B=\overline{\mathrm{conv}}f'_\mu\left([a;b]\backslash e\right)$. Тогда условия теоремы выполнены и оценка (32) принимает вид:

$$f(b)-f(a)\in \int\limits_{[a;b]\backslash e} d\mu(x)\cdot B=\mu\left([a;b]\backslash e\right)\cdot \overline{\mathrm{conv}}\frac{df}{d\mu}\left([a;b]\backslash e\right).$$

□

Следствие 3.4. *Пусть, в условиях теоремы 3.2, E — банахово пространство и $\|f'_\mu(x)\|\leqslant \varphi(x)$ при $x\in[a;b]\backslash e$. Тогда:*

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e}\varphi(x)\,d\mu(x).$$

В частности, в условиях теоремы 3.2 для $f(x)$, верна оценка

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant \sup_{x\in[a;b]\backslash e}\|f'_\mu(x)\|\cdot\mu\left([a;b]\backslash e\right).$$

Доказательство. Достаточно, в обозначениях теоремы 3.2, взять $B=\{x\in E|\,\|x\|\leqslant 1\}$.□

Перенесем теперь полученные результаты на случай отображения отрезка в индуктивную шкалу пространств. Приведем необходимые определения (см. [8], [20]).

Определение 3.5. Система ЛВП $\vec{E}=\{E_i\}_{i\in I}$, индуктивно упорядоченная по непрерывному (тождественному) вложению:

$$(i_1\preccurlyeq i_2)\Rightarrow\left(E_{i_1}\hookrightarrow E_{i_2}\right),$$

называется (внутренней) *индуктивной шкалой ЛВП.* Сходимость в шкале есть сходимость хотя бы в одном из пространств шкалы. Шкала $\vec{E}$ *линейна*, если порядок в I линеен. Система $\vec{B}=\{B_i\subset E_i\}_{i\in I}$ подмножеств пространств из шкалы $\vec{E}$ называется *индуктивной шкалой подмножеств* в $\vec{E}$, если

$$(i_1\preccurlyeq i_2)\Rightarrow\left(B_{i_2}\cap E_{i_1}=B_{i_1}\right).$$

Система линейных непрерывных функционалов $\vec{l}=\{l_i\in E_i^*\}_{i\in I}$ называется *функциональной шкалой* на $\vec{E}$, если

$$(i_1\preccurlyeq i_2)\Rightarrow\left(l_{i_2}\big|_{E_{i_1}}=l_{i_1}\right).$$

Если $\vec{B}$ — шкала подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{l}$ — функциональная шкала на $\vec{E}$, то положим

$$\vec{l}(\vec{B}):=\bigcup_{i\in I}l_i(B_i).$$

Шкала подмножеств $\vec{B}$ имеет скалярную m-меру нуль в $\vec{E}$, если $m\vec{l}(\vec{B})=0$ для любой функциональной шкалы $\vec{l}$ на $\vec{E}$.

В работах [21], [22] теорема Хана-Банаха и ее основные следствия перенесены на линейные индуктивные шкалы ЛВП. В частности, справедливы следующие утверждения.

Предложение 3.6. Если $\vec{E}$ — линейная индуктивная шкала отделимых вещественных ЛВП, $\vec{B}$ — шкала выпуклых замкнутых подмножеств в $\vec{E}$, $x_0 \notin \vec{B}$, то на $\vec{E}$ найдется такая функциональная шкала $\vec{l}$, что

$$\vec{l}(x_0) > \sup \vec{l}(\vec{B}).$$

Предложение 3.7. Если $\vec{E} = \{E_i\}_{i \in I}$ — линейная индуктивная шкала ЛВП, то любой функционал $l_i \in E_i^*$ можно продолжить до функциональной шкалы $\vec{l}$ на $\vec{E}$.

Последние результаты позволяют повторить схему доказательства теоремы 3.2 в случае отображения отрезка в линейную индуктивную шкалу ЛВП.

Теорема 3.8. *Пусть μ — конечная непрерывная борелевская мера на $[a;b]$, $m \ll \mu$, $\vec{E}$ — линейная индуктивная шкала отделимых вещественных ЛВП, $\vec{B}$ — шкала замкнутых выпуклых подмножеств в $\vec{E}$, отображение $\vec{f}:[a;b] \to \vec{E}$ непрерывно на $[a;b]$, μ-дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, и шкала подмножеств $\vec{f}(e)$ имеет скалярную m-меру нуль в $\vec{E}$. Если $\vec{f}'_\mu(x) \in \varphi(x) \cdot \vec{B}$ при $x \in [a;b]\backslash e$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и μ-суммируема на $[a;b]\backslash e$, то*

$$\vec{f}(b) - \vec{f}(a) \in \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)\, d\mu(x) \cdot \vec{B}.$$

Следствие 3.9 ("Теорема о среднем"). *В условиях теоремы 3.8 для $\vec{f}$:*

$$\vec{f}(b) - \vec{f}(a) \in \mu([a;b]\backslash e) \cdot \overrightarrow{\overline{\operatorname{conv}} \frac{df}{d\mu}([a;b]\backslash e)}.$$

В заключение отметим, что уже в скалярном случае нетрудно привести примеры оценки через производную по мере, более точной, чем классическая. Так, если f — непрерывная возрастающая функция, порождающая меру μ, то оценка (34) превращается в точное равенство.

Список литературы

[1] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* Мир, Москва (1971).

[2] H. H. Keller , *Differential calculus in locally convex spaces.* Lecture Notes in Math. (1974).

[3] О. Г. Смолянов, *Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения.* Изд-во МГУ, Москва (1979).

[4] В. А. Балабанов, *Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа и их приложения.* Мецниереба, Тбилиси (1982).

[5] М. Ф. Сухинин, *Избранные главы нелинейного анализа.* Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, Москва (1992).

[6] И. В. Орлов, *Теорема Лагранжа и ее обобщение в современной математике.* — Математика сегодня'87. Вища школа, Киев (1987), с. 169–188.

[7] И. В. Орлов, *Теорема Лагранжа в топологических и псевдотопологических векторных пространствах.* — Уч. зап. Симферопольск. гос. ун-та. Математика, физика, химия (1995), №1–2 (40–41), с.113–122.

[8] И. В. Орлов, *Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств.* — Математическая физика, анализ, геометрия (2001), **8**, №4, с.419–439.

[9] V. F. Dem'yanov, G. Di Pillo, and F. Facchinei, *Exact penalization via Dini and Hadamard conditional derivatives.* — Optimization Methods and Software (1998), **9**, pp.19–36.

[10] V. F. Dem'aynov, *Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis.* — Nonconvex Optimization and its Applications (2000), **43**, pp.85–137.

[11] A. Uderzo, *Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems.* — Nonconvex Optimization and its Applications (2000), **43**, pp.297–327.

[12] V. F. Dem'yanov, *The rise of nonsmooth analysis: its main tools.* — Кибернетика и системный анализ (2002), №4, с.63–85.

[13] М. З. Згуровский, В.С. Мельник, *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* Наукова думка, Киев (1999).

[14] И. В. Орлов, *Нормальные индексы и нормальное дифференцирование в локально выпуклых пространствах.* — Spectral and Evolution Problems (2002), **12**, pp.103–112.

[15] I. V. Orlov, *A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces.* — Operator Theory: Adv. & Appl. (2000), **118**, pp.321–333.

[16] И. В. Орлов, *Нормальная дифференцируемость и экстремумы функционалов в локально выпуклом пространстве.* — Кибернетика и системный анализ (2002), №4, С.24–35.

[17] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* Наука, Москва (1974).

[18] С. Сакс, *Теория интеграла.* ИЛ, Москва (1949).

[19] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения.* Мир, Москва (1969).

[20] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, *Обобщенные функции и уравнения в свертках.* Наука, Москва (1994).

[21] И. В. Орлов, *Теорема Хана-Банаха в индуктивных шкалах пространств.* — Доповіді НАН України (1997), №9, с.32–36.

[22] И. В. Орлов, *Принципы функционального анализа в шкалах пространств: теорема Хана-Банаха.* — Ученые Записки ТНУ. Математика. Физика (2000), **2**, №9, с.88–95.

Orlov I.V., Math. Dept. of National Taurida V. Vernadsky University, Vernadsky ave. 4, Simferopol, 95007

E-mail: old@tnu.crimea.ua

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И СЛОЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕЯВНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.О. Ремизов
Московский государственный университет,
Москва, Россия

В работе исследуются векторные поля специального вида, возникающие при изучении неявных дифференциальных уравнений (уравнений, не разрешенных относительно производных). Особые точки таких полей не изолированы, а образуют многообразие W^c коразмерности два в фазовом пространстве. При малых возмущениях исходного неявного уравнения многообразие W^c не исчезает и не вырождается, а лишь деформируется. Получены результаты о структуре инвариантных многообразий таких полей, а также гладкие нормальные формы.

Keywords: векторные поля, особые точки, диффеоморфизмы, гладкая эквивалентность, резонансы, первые интегралы, нормальные формы, инвариантные мноообразия, слоения.

1. Введение. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производных, называемые также неявными дифференциальными уравнениями (НДУ), известны давно и возникают во многих прикладных задачах. Проблема исследования особых точек НДУ возникла еще в позапрошлом веке, король Швеции и Норвегии Оскар II включил ее в список из четырех вопросов на премию 1885 года [1]. Однако для достаточно полного решения этой проблемы потребовалось около ста лет. Речь идет, разумеется, об *одном* неявном уравнении с *одной* фазовой переменной $F(t, x, p) = 0$, где $p = dx/dt$.

В 1932 г. итальянский математик Чибрарио (Maria Cinquini-Cibrario) опубликовала работу [13], где была получена нормальная форма $p^2 = t$ уравнения $F(t, x, p) = 0$ в окрестности типичной (*регулярной*) особой точки. Однако этот результат остался в то время, по-видимому, малоизвестным, так как нормальная форма $p^2 = t$ была позже заново найдена Л. Дара (L. Dara) и Ю.А. Бродским. Этот результат (часто называемый теоремой Чибрарио) ныне стал классическим и приводится в [1] – [7].

В 1959 г. в работе А.В. Пхакадзе и А.А. Шестакова [11] было описано типичное поведение интегральных кривых уравнения $F(t, x, p) = 0$ в окрестности *нерегулярной* особой точки. В 1971 г. физики А.Д. Пилия и В.И. Федоров [12] получили аналогичные результаты, рассматривая особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме. С этими же особенностями столкнулся и Ф. Такенс (Floris Takens) при изучении уравнений релаксационного типа [15].

В 1975 г. Л. Дара в [14] показал, что уравнение $F(t, x, p) = 0$ для функции F общего положения может иметь только пять типов *нерегулярных* особых точек: *хорошо сложенное седло*, *хорошо сложенный узел*, *хорошо сложенный фокус*, *эллиптическая сборка*, *гиперболическая сборка*. Первые три особенностей называются *хорошо сложенными*, а две последние – *собранными*. Л. Дара сформулировал гипотезу, что в окрестности хорошо сложенной особой точки уравнение $F(t, x, p) = 0$ топологически эквивалентно нормальной форме $(p^2 + \gamma t^2)/2 = x$, параметр $\gamma < 0$ для седла, $0 < \gamma < 1/4$ для узла, $\gamma > 1/4$ для фокуса; а в окрестности собранной особой точки – уравнению $p^3 - xp = t$ для эллиптической сборки и $p^3 + xp = t$ для гиперболической сборки.

В 1985 г. А.А. Давыдов в работе [6] доказал, что гипотеза Дара верна для хорошо сложенных собых точек, но не верна для собранных. В [6] были найдены нормальные формы НДУ общего положения в окрестности нерегулярной особой точки, для которой дискриминантная кривая гладкая. Так, в окрестности хорошо сложенной особой точки уравнение $F(t, x, p) = 0$ локальным диффеоморфизмом плоскости (t, x) приводится к нормальной форме $(p + kt)^2 = x$, где параметр $k < 0$ для сложенного седла, $0 < k < 1/8$

для сложенного узла, $k > 1/8$ для сложенного фокуса.[2] Топологическая эквивалентность убивает параметр k в каждой из трех нормальных форм. Таким образом, хорошо сложенные особые точки имеют относительно диффеоморфизмов один модуль, а относительно гомеоморфизмов структурно устойчивы. Топологические нормальные формы собранных особых точек содержат функциональные инварианты.

В 1994 г. была опубликована монография А.А. Давыдова [7], содержащая все результаты, полученные автором ранее, и некоторые новые. В 1995 и 1996 гг. А.А. Давыдов (с соавторами) опубликовал работы [8] и [9], где были получены новые результаты о нормальных формах уравнения $F(t,x,p)=0$ в окрестности сложенных особых точек. Таким образом, проблему исследования особых точек уравнения $F(t,x,p) = 0$, предложенную королем Швеции и Норвегии в 1885 году, в настоящее время можно считать решенной. Отметим, что эта проблема исследовалась также и другими авторами, см. библиографию в [6], [7], [9] и [10]. Историю вопроса и краткий обзор результатов можно найти в [6] и [9].

В работах Л. Дара, Ф. Такенса и Р. Тома (René Thom) [14] – [16] был открыт новый, чрезвычайно эффектный подход к исследованию НДУ – *поднятие* многозначного поля направлений НДУ на задаваемую им поверхность в пространстве (t,x,p), где $p = dx/dt$. В результате полученное *поднятое поле* оказывается однозначным и гладким, сложенные особые точки (узлы, седла и фокусы) превращаются при этом в обычные узлы, седла и фокусы. Этот подход (который можно сравнить с введением римановой поверхности многозначной функции комплексного переменного) был затем неоднократно использован в работах В.И. Арнольда, А.А. Давыдова и других. Обобщение этого метода на случай системы НДУ произвольной размерности будет использовано и в настоящей работе.

Данная статья содержит изложение некоторых результатов, полученных автором в [18] – [22]. Отметим также работу [17] на близкую тему.

2. Построение поднятого поля. Рассмотрим систему НДУ

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{p} = d\boldsymbol{x}/dt, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, $\boldsymbol{F} = (F_1,\ldots,F_n)$ – n-мерные векторы. Функция $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ C^{k+1}-гладкая, $k \geq 1$. В общем случае уравнение (1) определяет в $(2n+1)$-мерном пространстве с координатами $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ гладкое многообразие размерности $n+1$, а на нем задает так называемое *поднятое* векторное поле (поле направлений). Это поле определяется как пересечение касательного пространства к многообразию $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ и *контактного* пространства, задаваемого соотношением $\boldsymbol{p} = d\boldsymbol{x}/dt$.

Касательное пространство определяется как пересечение ядер 1-форм

$$\frac{\partial F^i}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}dx^j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial p^j}dp^j = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

а контактное пространство – как пересечение ядер 1-форм $dx^i - p^i dt = 0$, $i = \overline{1,n}$. Подставляя последние соотношения в (2), получаем линейную систему

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}p^j\right)dt + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial p^j}dp^j = 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{3}$$

относительно неизвестных $dt, dp^1, \ldots, dp^n$. Обозначим через A матрицу (3). Если $rangA = n$, то касательное и контактное пространства трансверсальны, и их пересечение определяет поле направлений (в противном случае поле направлений не определено).

Особыми точками уравнения (1) называются такие точки многообразия $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, в которых матрица $\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{p}$ вырождена. Очевидно, что из условия $rangA < n$ следует $\det(\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{p}) = 0$. Поэтому поле направлений может быть не определено только в особых

---

[2] Нормальная форма Давыдова приводится к нормальной форме Дара при помощи замены $\tilde{x} = 2(x + kt^2/2)$, при этом $\gamma = 2k$.

точках уравнения (1). Обратное, разумеется, не верно. Особая точка уравнения (1) называется *правильной*, если в ней $rang A = n$ и, следовательно, поле направлений определено. Особая точка называется *неправильной*, если в ней $rang A < n$.

Построенное поле направлений локально может быть нормировано и заменено векторным полем $\boldsymbol{v}$, которое обращается в нуль в точках касания касательного и контактного пространств – неправильных особых точках уравнения (1). Это векторное поле называется *поднятым*, оно имеет вид

$$\boldsymbol{v} = v_t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_{x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} v_{p^i} \frac{\partial}{\partial p^i},$$

компоненты v_t, v_{x^i}, v_{p^i} выражаются через миноры матрицы A следующим образом:

$$v_t = \Delta_1, \quad v_{p^i} = (-1)^i \Delta_{i+1}, \quad v_{x^i} = p^i v_t, \quad i = \overline{1,n},$$

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из A при отбрасывании i-го столбца.

Для уравнения (1) общего положения в случае $n > 1$ множество особых точек W^c – стратифицированное многообразие со стратами $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$, где $\mathfrak{S}_k$ определяется условием $rang A = n - k$ и имеет коразмерность $k(k+1)$.[3] Типичные особые точки поля $\boldsymbol{v}$ – это точки, принадлежащие страту $\mathfrak{S}_1$ ($rang A = n - 1$) коразмерности 2. Особые точки, в которых $rang A < n - 1$, соответствуют вырождению гораздо более высокой коразмерности. Согласно общей идеологии теории особенностей, при исследовании уравнения (1) общего положения или семейства таких уравнений, зависящего от малого числа параметров, случай $rang A < n - 1$ не встречается: уже для вырождения $rang A = n - 2$ коразмерность равна 6.

Если для исходного уравнения (1) размерность $n = 1$, то построенное векторное поле $\boldsymbol{v}$, определенное на двумерной поверхности $F = 0$, в общем случае имеет лишь изолированные невырожденные особые точки: узел, седло или фокус.

Если же размерность $n > 1$, то компоненты v_t, v_{x^i}, v_{p^i} поднятого поля оказываются функционально зависимыми. Точнее, в общем случае в особой точке $rang A = n - 1$, и среди функций v_t, v_{x^i}, v_{p^i} имеются *две независимые* (обозначим их v и w), а остальные – их линейные комбинации, т.е. принадлежат идеалу, порожденному v и w в кольце гладких функций. Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{v}$ имеет вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = w, \quad \dot{z}^i = \alpha^i v + \beta^i w, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где функции $v = v(x,y,\boldsymbol{z})$, $w = w(x,y,\boldsymbol{z})$, $\alpha^i = \alpha^i(x,y,\boldsymbol{z})$, $\beta^i = \beta^i(x,y,\boldsymbol{z})$ C^k-гладкие по совокупности переменных, $\boldsymbol{z} = (z^1, \ldots, z^{n-1})$. Доказательство см. в [19].

В окрестности типичной особой точки (страта $\mathfrak{S}_1$) особые точки поля $\boldsymbol{v}$ образуют на $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ многообразие W^c коразмерности 2 – пересечение нулевых уровней функций $v(x,y,\boldsymbol{z})$ и $w(x,y,\boldsymbol{z})$. Спектр линеаризации поля $\boldsymbol{v}$ в особой точке состоит из собственных значений $(\lambda_1, \lambda_2, 0, \ldots, 0)$, где число нулей равно $n - 1$. Если оба собственных значения λ_1, λ_2 ненулевые, то уравнения $v(x,y,\boldsymbol{z}) = 0$, $w(x,y,\boldsymbol{z}) = 0$ независимы и W^c представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие. Нулевому собственному значению соответствует набор $n - 1$ независимых собственных векторов, касательных к многообразию W^c в особой точке. При каких бы то ни было малых возмущениях исходного уравнения (1) общий вид поля (4) остается неизменным, изменяются только функции v, w, α_i, β_i. Многообразие W^c не исчезает и не вырождается, а лишь слегка деформируется.

Если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то W^c является центральным многообразием, причем ограничение поля $\boldsymbol{v}$ на W^c тождественно равно нулю. Из теоремы сведения Шошитайшвили [5] следует, что при $k \geq 2$ в окрестности особой точки система (4) *топологически* эквивалентна произведению стандартного седла $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ (если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$ разных знаков) или узла

[3] Последнее утверждение следует из леммы о стратификации пространства линейных операторов или из более общей теоремы – так называемой "формулы произведения корангов"[25].

$\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$ (если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$ одного знака) и тривиальной системы $\dot{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$. Таким образом, если $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то фазовый портрет (4) получается при гомеоморфном преобразовании из фазового портрета произведения стандартного двумерного узла или стандартного двумерного седла на тривиальную систему $\dot{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$ размерности $n-1$.

Вопрос о гладкой эквивалентности более сложен. Ниже будет показано, что при выполнении дополнительных условий система (4) *конечно-гладко* эквивалентна прямому произведению $\dot{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$ и некоторой двумерной системы со спектром (λ_1, λ_2).

3. Нерезонансный случай. Набор собственных значений (λ_1, λ_2) будем называть *резонансным первого рода*, если существует соотношение $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 = 0$, где $p_i \geq 0$ – целые, $p_1 + p_2 \geq 1$. Число $p_1 + p_2$ будем называть *порядком резонанса первого рода*.

Набор собственных значений (λ_1, λ_2) будем называть *резонансным второго рода*, если для $j = 1$ или 2 существует соотношение $q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 = \lambda_j$, где $q_i \geq 0$ – целые, $q_1 + q_2 \geq 2$. Число $q_1 + q_2$ будем называть *порядком резонанса второго рода*.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, обозначим $\lambda_* = \min\{|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|\}$ и $\lambda^* = \max\{|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|\}$. Следуя [23], для каждого целого $\nu \geq 1$ определим число $N(\nu) = 2\left[(2\nu+1)\,\frac{\lambda^*}{\lambda_*}\right] + 2$, где $[a]$ означает целую часть числа a.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\nu \geq 1$ набор (λ_1, λ_2) не имеет резонансов первого рода до порядка $N(\nu)$ включительно и $k \geq N(\nu)$. Тогда в окрестности особой точки система (4) C^ν-гладко эквивалентна системе*

$$\dot{X} = V(X, Y, \boldsymbol{Z}), \quad \dot{Y} = W(X, Y, \boldsymbol{Z}), \quad \dot{Z}^i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{Z} = (Z^1, \ldots, Z^{n-1})$, функции $V(X, Y, \boldsymbol{Z})$, $W(X, Y, \boldsymbol{Z})$ принадлежат классу C^k.

Доказательство теоремы см. в [19] или [21].

Система (5) распадается на тривиальную $(n-1)$-мерную систему $\dot{\boldsymbol{Z}} = \mathbf{0}$ и двумерную систему

$$\dot{X} = V(X, Y, \boldsymbol{Z}), \quad \dot{Y} = W(X, Y, \boldsymbol{Z}), \tag{6}$$

в которой $\boldsymbol{Z}$ играет роль параметра, не зависящего от времени. Таким образом, система (5) определяет $(n-1)$-параметрическое семейство векторных полей (6), конечно-гладкие нормальные формы которых исследованы в [24]. Например, если набор (λ_1, λ_2) не имеет резонансов второго рода, то семейство (6) конечно-гладко эквивалентно линейному семейству $\dot{X} = A_{11}(\boldsymbol{Z})X + A_{12}(\boldsymbol{Z})Y$, $\dot{Y} = A_{21}(\boldsymbol{Z})X + A_{22}(\boldsymbol{Z})Y$, где все $A_{ij}(\boldsymbol{Z})$ – функции, гладко зависящие от $\boldsymbol{Z}$ (теор. 1 из [24]). Если же набор (λ_1, λ_2) не имеет резонансов первого рода до порядка $N(\nu)$, а все резонансные соотношения второго рода являются следствием одного равенства $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 = 0$, $p_1 + p_2 > N(\nu)$, то семейство (6) конечно-гладко эквивалентно семейству $\dot{X} = Xg_1(\rho(X, Y), \boldsymbol{Z})$, $\dot{Y} = Yg_2(\rho(X, Y), \boldsymbol{Z})$, где g_i – полиномы от скалярной переменной ρ с коэффициентами, гладко зависящими от $\boldsymbol{Z}$, а $\rho(X, Y)$ – резонансный моном (теор. 3 из [24]).

4. Резонансный случай. Дальнейшая часть статьи посвящена случаю, когда собственные значения вещественные и ненулевые, но имеется резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Линейные замены переменных переводят системы вида (4) в системы такого же вида (две компоненты независимы, а все остальные – их линейные комбинации). Сделав подходящее аффинное преобразование фазового пространства, можно добиться того, чтобы рассматриваемая особая точка совпадала с началом координат, а линейная часть поля $\boldsymbol{v}$ имела жорданову форму $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \ldots, 0)$.

Векторное поле (4) удовлетворяет *условию общности положения квадратичной части* (условию $\mathcal{Q}$), если в той системе координат, в которой линейная часть поля имеет жорданову форму, хотя бы для одного номера $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ в особой точке выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \alpha^s}{\partial y} - \frac{\partial \beta^s}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z^s} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z^s} \neq 0. \tag{7}$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ при $n = 2$.

Теорема 2. *Пусть для векторного поля* (4) *при $n = 2$ выполнено условие $\mathcal{Q}$. Тогда в окрестности особой точки поле порождает слоение фазового пространства семейством инвариантных поверхностей, которое конечно-гладким диффеоморфизмом может быть приведено к каноническому виду $xy - z^2 = c$, $c = \mathrm{const}$.*

Доказательство теоремы см. в [21].

Например, векторное поле $\dot{x} = x - xz$, $\dot{y} = -y - yz + xy^2$, $\dot{z} = y(x - xz)$ вида (4) удовлетворяет условию $\mathcal{Q}$ и имеет первый интеграл $U = xy + z^2 - xyz$, который порождает слоение фазового пространства семейством инвариантных поверхностей $xy + z^2 - xyz = c$. По лемме Морса, вблизи начала координат это слоение может быть приведено к каноническому виду при помощи диффеоморфизма. Использование леммы Морса не случайно: доказательство теоремы 2 опирается на лемму Морса и теорему 1 из [23] о гладкой эквивалентности систем в окрестности частично гиперболической особой точки.

Теперь перейдем к случаю $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ при $n > 2$.

Теорема 3. *Пусть для векторного поля* (4) *при $n > 2$ выполнено условие $\mathcal{Q}$. Тогда в окрестности особой точки имеют место следующие утверждения.*

1) Конечно-гладким диффеоморфизмом фазового пространства поле может быть приведено к виду

$$\dot{X} = V(X, Y, Z, \Xi), \quad \dot{Y} = W(X, Y, Z, \Xi), \quad \dot{Z} = Q(X, Y, Z, \Xi), \quad \dot{\Xi} = \mathbf{0},$$

где $\Xi = (\Xi^1, \dots, \Xi^{n-2})$ играет роль $(n-2)$-мерного параметра, не зависящего от времени. Векторное поле порождает слоение фазового пространства семейством трехмерных инвариантных многообразий $\Xi = \Xi_0$.

2) В случае общего положения для любого сколь угодно большого числа N существует такая окрестность особой точки $\mathcal{O}_N$, в которой все особые точки поля не имеют резонансов первого рода до порядка N, за исключением подмногообразия $\mathcal{R} \subset W^c$ размерности $n - 2$, все точки которого имеют резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

3) В окрестности каждой особой точки $\boldsymbol{P} \in \mathcal{O}_N \setminus \mathcal{R}$ векторное поле конечно-гладким диффеоморфизмом может быть приведено к виду

$$\dot{X} = V(X, Y, Z, \Xi), \quad \dot{Y} = W(X, Y, Z, \Xi), \quad \dot{Z} = 0, \quad \dot{\Xi} = \mathbf{0}.$$

4) Пересечение каждого слоя $\Xi = \Xi_0$ с центральным многообразием W^c – гладкая кривая, а (в случае общего положения) с резонансным подмногообразием $\mathcal{R}$ – точка $\boldsymbol{R}(\Xi_0)$. В окрестности $\boldsymbol{R}(\Xi_0)$ векторное поле порождает на трехмерном инвариантном многообразии $\Xi = \Xi_0$ слоение семейством инвариантных поверхностей, которое диффеоморфно каноническому слоению $XY - Z^2 = C$, $C = \mathrm{const}$.

Доказательство теоремы см. в [21].

Список литературы

[1] Арнольд В.И. *Теория катастроф.* М.: Наука, 1990.

[2] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

[3] Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2000.

[4] Арнольд В.И. *Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений.* Избранное – 60. М.: ФАЗИС, 1997.

[5] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Итоги Науки и Техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 1, с. 7–149.

[6] Давыдов А.А. *Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки.* Функц. анализ и его приложения, 1985, т. 19, вып. 2, с. 1 – 10.

[7] Davydov A.A. *Qualitative Theory of Control Systems.* Mathematical Monographs, Vol. 141. AMS, Providence, Rhode Islans, 1994.

[8] Давыдов А.А., Ортиз-Бобадилья Л. *Нормальные формы сложенных элементарных особых точек.* Успехи матем. наук, 1995. – Том 50, вып. 6 (306), с. 175 – 177.

[9] Давыдов А.А., Росалес-Гонсалес Э. *Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости.* ДАН, 1996. – Том 350, N 2, с. 151 – 154.

[10] Кузьмин А.Г. *О поведении характеристик уравнения смешанного типа вблизи линии вырождения.* Дифференц. уравнения, 1981. – Том 17, N 11, с. 2052 – 2063.

[11] Пхакадзе А.В., Шестаков А.А. *О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.* Мат. сборник, 1959, т. 49, вып. 1, с. 3 – 12.

[12] Пилия А.Д., Федоров В.И. *Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью.* ЖЭТФ, 1971, т. 60, вып. 1, с. 389 – 399.

[13] Cibrario M. *Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivative parzialy di secondo ordine di tipo misto.* Rend. Lombardo 65 (1932), 889 – 906 p.

[14] Dara L. *Singularities generiques des equations differentielles multiformes.* Bol. Soc. Bras. Math., 1975, v. 6, N 2, p. 95 – 129.

[15] Takens F. *Constrained equations; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions.* Lect. Notes Math. 1976. **525**, p. 143 – 234.

[16] Thom R. *Sur les equations differentielles multiforms et leur integrales singulieres.* Th. R. Bol. Soc. Bras. Math., 1971, v. 3, N 1, p. 1 – 11.

[17] Пазий Н.Д. *Локальная аналитическая классификация уравнений соболевского типа.* Дисс. ... кандид. физ.- мат. наук. Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1999.

[18] Ремизов А.О. *О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных.* Дифференц. уравнения, 2002, т. 38, N 5, с. 622 – 630.

[19] Ремизов А.О. *О неправильных особых точках коранга 1 систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных.* Дифференц. уравнения, 2002. Т. 38, N 8, с. 1053 – 1062.

[20] Ремизов А.О. *Векторные поля с неизолированными особыми точками.* ДАН, 2002. Т. 384, N 6, с. 735 – 737.

[21] Ремизов А.О. *Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками.* Мат. сборник, 2002, N 11 (в печати).

[22] Ремизов А.О. *Неявные дифференциальные уравнения и порождаемые ими векторные поля.* Труды междунар. конференции по дифф. уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 1 – 6 июля, 2002.

[23] Самовол В.С. *Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.* Труды Моск. мат. общества, 1982. – Том 44, с. 213–234.

[24] Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю. *Конечно-гладкие нормальные формы локальных семейств диффеоморфизмов и векторных полей.* Успехи матем. наук, 1991. – Том 46, вып. 1 (277), с. 3–39.

[25] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.* М.: Наука, 1982.

E-mail: remizov@caravan.ru

ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. С. Рыхлов
Саратовский государственный университет,
Саратов, Россия

Исследуется вопрос о полноте в пространстве $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций простейшего обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка, порожденного дифференциальным выражением $y^{(n)}$ и двухточечными двучленными граничными условиями $\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\beta_\nu y^{(\nu-1)}(1)=0$, $\nu=\overline{1,n}$.

Keywords: полнота, собственные и присоединенные функции, обыкновенный дифференциальный оператор, нерегулярные граничные условия

1. Постановка задачи

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y):=y^{(n)}(x),\quad x\in[0,1],$$

и двухточечными двучленными граничными условиями

$$U_\nu(y):=\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0)+\beta_\nu y^{(\nu-1)}(1)=0,\quad \nu=\overline{1,n},\tag{1}$$

где $\alpha_\nu,\beta_\nu\in\mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|>0$, $\nu=\overline{1,n}$.

Требуется выяснить, при каких значениях параметров α_ν,β_ν система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора L полна в пространстве $L_2[0,1]$. Некоторым результатам, полученным при решении этой задачи, и посвящена данная публикация. Краткую историю вопроса можно найти, например, в [1].

2. Вспомогательные результаты

Пусть $\omega_j=\exp\left((2j-1)\pi i/n\right)$, $j=\overline{1,n}$ – корни n-й степени из -1, $\lambda=-\rho^n$. Тогда, очевидно, функции $y_j(x,\rho)=\exp(\rho\omega_j x)$, $j=\overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $l(y)-\lambda y=0$.

Положим $u_{\nu j}:=U_\nu(y_j)=\rho^{n-1}\left(v_{\nu j}+e^{\rho\omega_j}w_{\nu j}\right)$, где $v_{\nu j}=\alpha_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $w_{\nu j}=\beta_\nu\omega_j^{\nu-1}$, и обозначим

$$V_j:=(v_{1j},v_{2j},\dots,v_{nj})^T,\quad W_j:=(w_{1j},w_{2j},\dots,w_{nj})^T,$$
$$\Delta_0:=\det\left(V_1V_2\dots V_n\right)=:|V_1V_2\dots V_n|,\ \Delta_1:=|W_1V_2\dots V_n|,\ \dots,\ \Delta_n:=|V_1\dots V_{n-1}W_n|,$$
$$\Delta_{12}:=|W_1W_2V_3\dots V_n|,\ \Delta_{23}:=|V_1W_2W_3V_4\dots V_n|,\ \dots,\ \Delta_{1n}:=|W_1V_2\dots V_{n-1}W_n|,$$
$$\dots,\ \Delta_{12\dots n}:=|W_1W_2\dots W_n|.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\Omega=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1}\end{pmatrix}.\tag{2}$$

Обозначим столбцы Ω через Y_j, а столбцы Ω^T через Z_j, т. е.

$$\Omega=\left(Y_1Y_2\dots Y_n\right),\qquad \Omega^T=\left(Z_1Z_2\dots Z_n\right).$$

Очевидно, $\theta=\det\Omega=\det\Omega^T\neq0$.

Положим $\alpha := (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)^T$, $\beta := (\beta_1\beta_2\dots\beta_n)^T$ и разложим эти векторы по базису $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, т. е. представим их в виде

$$\alpha = \Omega^T\hat{\alpha}, \qquad \beta = \Omega^T\hat{\beta}, \tag{3}$$

где $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\dots\hat{\alpha}_n)^T = \left(\Omega^T\right)^{-1}\alpha$, $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\dots\hat{\beta}_n)^T = \left(\Omega^T\right)^{-1}\beta$.

Векторы V_j и W_j, $j = \overline{1,n}$, разложим по другому базису, а именно, по базису $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, и пусть компоненты векторов $\hat{V}_j$ и $\hat{W}_j$ соответственно есть коэффициенты разложения, т. е.

$$V_j = \Omega\hat{V}_j, \qquad W_j = \Omega\hat{W}_j.$$

Оказывается, что векторы $\hat{V}_j$ $(\hat{W}_j)$, $j = \overline{1,n}$, получаются друг из друга в результате циклического сдвига.

Лемма 1. *Обозначим* $a_k := \hat{\alpha}_k\omega^{k-1}$, $b_k := \hat{\beta}_k\omega^{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, *где* $\omega = \omega_1$. *Тогда имеют место формулы*

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} a_n \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{V}_n = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \\ a_1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} b_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \hat{W}_n = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать далее через $\hat{\Delta}_{jk\dots l}$ определители, аналогичные определителям $\hat{\Delta}_{jk\dots l}$, в которых вместо столбцов V_j, W_j используются столбцы $\hat{V}_j$, $\hat{W}_j$. Очевидно, $\Delta_{jk\dots l} = \theta\hat{\Delta}_{jk\dots l}$, т. е. определители $\Delta_{jk\dots l}$ и $\hat{\Delta}_{jk\dots l}$ обращаются в нуль или отличны от нуля одновременно.

Отметим на плоскости точки 0, ω_j, $\omega_j + \omega_k$ $(j \neq k)$, $\omega_j + \omega_k + \omega_l$ $(j \neq k \neq l \neq j)$, $\dots$, $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n (= 0)$. Пусть M_0 есть выпуклая оболочка этих точек.

Так как рассмотрение случаев четного и нечетного n существенно отличается, то далее будем рассматривать только случай $n = 2m+1$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$.

Легко установить, что M_0 является правильным $2n$-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{lll} \sigma_{01}^0 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m, & \sigma_{02}^0 = \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+1}, \ \dots, & \sigma_{0n}^0 = \omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-1}, \\ \sigma_{01}^1 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m+1}, & \sigma_{02}^1 = \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+2}, \ \dots, & \sigma_{0n}^1 = \omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_m. \end{array}$$

Обозначим через M_0^0 и M_0^1 выпуклые оболочки точек σ_{0j}^0, $j = \overline{1,n}$ и σ_{0j}^1, $j = \overline{1,n}$ соответственно. Очевидно, M_0^0 и M_0^1 есть правильные n-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ_{0j}^0, $j = \overline{1,n}$ и σ_{0j}^1, $j = \overline{1,n}$ соответственно, которые перемежаются друг с другом.

Если удалить вершины многоугольника M_0 и обозначить через M_1 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_1 будет также, как и M_0, правильным $2n$-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{lll} \sigma_{11}^0 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1}, & \sigma_{12}^0 = \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_m, \ \dots, & \sigma_{1n}^0 = \omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-2}, \\ \sigma_{11}^1 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m+2}, & \sigma_{12}^1 = \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+3}, \ \dots, & \sigma_{1n}^1 = \omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m+1}, \end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольника M_0.

Обозначим через M_1^0 и M_1^1 выпуклые оболочки точек σ_{1j}^0, $j=\overline{1,n}$ и σ_{1j}^1, $j=\overline{1,n}$ соответственно. Очевидно, M_1^0 и M_1^1 есть правильные n-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ_{1j}^0, $j=\overline{1,n}$ и σ_{1j}^1, $j=\overline{1,n}$ соответственно, которые также перемежаются друг с другом.

Нетрудно показать, что многоугольник M_1 лежит строго внутри многоугольников M_0, M_0^0 и M_0^1.

3. Характеристический определитель

Характеристический определитель оператора L имеет вид

$$\begin{gathered}
\Delta(\rho)=\det\left(u_{\nu j}\right)_{\nu,j=1}^{n}= \\
=\rho^{1+2+\cdots+n-1}\left|V_1+e^{\rho\omega_1}W_1, V_2+e^{\rho\omega_2}W_2,\ldots,V_n+e^{\rho\omega_n}W_n\right|= \\
=\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\left\{\Delta_0+\left[\Delta_1e^{\rho\omega_1}+\Delta_2e^{\rho\omega_2}+\cdots+\Delta_ne^{\rho\omega_n}\right]+\right. \\
+\left[\Delta_{12}e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}+\Delta_{23}e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}+\cdots+\Delta_{1n}e^{\rho(\omega_n+\omega_1)}\right]+ \\
+\left[\Delta_{13}e^{\rho(\omega_1+\omega_3)}+\Delta_{24}e^{\rho(\omega_2+\omega_4)}+\cdots+\Delta_{2n}e^{\rho(\omega_n+\omega_2)}\right]+\cdots+ \\
+\left[\Delta_{123}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}+\Delta_{234}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}+\cdots+\Delta_{12n}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_n)}\right]+\cdots+ \\
+\left[\Delta_{12\ldots n-1}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{n-1})}+\Delta_{23\ldots n}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\cdots+\omega_n)}+\cdots+\right. \\
\left.\left.+\Delta_{12\ldots n-2n}e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{n-2})}\right]+\Delta_{12\ldots n}\right\}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Оказывается, что коэффициенты при экспонентах внутри квадратных скобок в (4) совпадают.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства*

$$\begin{array}{lllllllllll}
\Delta_1 & = & \Delta_2 & = & \ldots & = & \Delta_{n-2} & = & \Delta_{n-1} & = & \Delta_n, \\
\Delta_{12} & = & \Delta_{23} & = & \ldots & = & \Delta_{n-2n-1} & = & \Delta_{n-1n} & = & \Delta_{1n}, \\
\Delta_{13} & = & \Delta_{24} & = & \ldots & = & \Delta_{n-2n} & = & \Delta_{1n-1} & = & \Delta_{2n}, \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\Delta_{123} & = & \Delta_{234} & = & \ldots & = & \Delta_{n-2n-1n} & = & \Delta_{1n-1n} & = & \Delta_{12n}, \\
\ldots & & & & & & & & & & \\
\Delta_{12\ldots n-1} & = & \Delta_{23\ldots n} & = & \ldots & = & \Delta_{12\ldots n-4n-2n-1n} & = & \Delta_{12\ldots n-3n-1n} & = & \Delta_{12\ldots n-2n}.
\end{array}$$

На основании этой леммы для $\Delta(\rho)$ можно получить следующее представление, в котором слагаемые расположены группами по росту в порядке его невозрастания при $|\rho|\to\infty$ (для дальнейшего изложения достаточно выписать подробно несколько первых групп слагаемых):

$$\begin{gathered}
\Delta(\rho)=\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\left\{\Delta_{12\ldots m}\left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_m)}+\cdots+e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{m-1})}\right]+\right. \\
+\Delta_{12\ldots m+1}\left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m+1})}+\cdots+e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_m)}\right]+ \\
+\Delta_{12\ldots m-1}\left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m-1})}+\cdots+e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{m-2})}\right]+ \\
+\Delta_{12\ldots m+2}\left[e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m+2})}+\cdots+e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\cdots+\omega_{m+1})}\right]+ \\
\left.+\cdots+\Delta_0+\Delta_{12\ldots n}\right\}.
\end{gathered} \tag{5}$$

4. Начальная геометрическая классификация дифференциальных операторов

Некоторые коэффициенты, стоящие перед квадратными скобками в (5), могут равняться нулю. Отметим на плоскости точки ω_j, $\omega_j+\omega_k$, $\omega_j+\omega_k+\omega_l$, ..., соответствующие коэффициентам при ρ в показателях тех экспонент, которые реально содержаться в $\Delta(\rho)$. Пусть M_Δ есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно, M_Δ является многоугольником, симметричным относительно начала координат и инвариантным относительно поворота на угол $2\pi/n$. Вид этого многоугольника характеризует степень вырожденности характеристического определителя.

Выделим первые четыре случая в порядке усиления вырожденности:

(I) $\Delta_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_0$ и в этом случае оператор L регулярен по Биркгофу [2], с. 66-67. Множество таких операторов будем обозначать через NR_0.

(II) $\Delta_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} = 0$ или $\Delta_{12\ldots m} = 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} \neq 0$. Здесь или $M_\Delta = M_0^0$ (в первом подслучае), или $M_\Delta = M_0^1$ (во втором подслучае). При этих условиях оператор L является слабо нерегулярным или нормальным по терминологии [3]. Множества таких операторов будем обозначать через NR_0^0 и NR_0^1 соответственно. При $n = 3$ операторы из множества NR_0^0 изучались в [4].

(III) $\Delta_{12\ldots m} = \Delta_{12\ldots m+1} = 0$ и $\Delta_{12\ldots m-1} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+2} \neq 0$. Этот случай и последующие возможны только при $n \geq 5$ $(m \geq 2)$. Здесь $M_\Delta = M_1$ и оператор L является сильно нерегулярным. Множество таких операторов будем обозначать через NR_1. При $n = 5$ операторы из этого множества изучались в [1].

(IV) $\Delta_{12\ldots m} = \Delta_{12\ldots m+1} = 0$ и либо $\Delta_{12\ldots m-1} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+2} = 0$, либо $\Delta_{12\ldots m-1} = 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+2} \neq 0$. Здесь или $M_\Delta = M_1^0$ (в первом подслучае), или $M_\Delta = M_1^1$ (во втором подслучае). Множества таких операторов будем обозначать через NR_1^0 и NR_1^1 соответственно. При $n = 5$ операторы из этого множества также изучались в [1].

5. Аналитическое описание некоторых классов нерегулярных операторов. Теорема полноты

Далее будем рассматривать только случай $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1, n}$. В этом случае, не нарушая общности, можно считать $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 1$. С учетом (2) и (3) отсюда следует, что $\hat\beta_1 = 1$, $\hat\beta_2 = \hat\beta_3 = \cdots = \hat\beta_n = 0$, т. е. $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$. Следовательно, векторы $\hat W_1, \hat W_2, \ldots, \hat W_n$ на основании Леммы 1 образуют единичную матрицу. Отсюда, в частности, следует, что

$$\hat\Delta_{12\ldots k} := \begin{vmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_{k+4} & a_{k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \cdots & a_1 & a_n \\ a_{n-k} & a_{n-k-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{6}$$

Таким образом, для выяснения того, является ли оператор L регулярным или нерегулярным и какого типа нерегулярность (см. случаи **(II)**–**(IV)**) можно обойтись вычислением определителей $\hat\Delta_{12\ldots m}$, $\hat\Delta_{12\ldots m+1}$, $\hat\Delta_{12\ldots m-1}$, $\hat\Delta_{12\ldots m+2}$ типа (6), которые имеют значительно меньшие порядки, чем исходные определители $\Delta_{12\ldots m}$, $\Delta_{12\ldots m+1}$, $\Delta_{12\ldots m-1}$, $\Delta_{12\ldots m+2}$. Более того, специфическая структура определителей типа (6) позволяет дать достаточно простое аналитическое описание операторов из множеств NR_0^1, NR_1, NR_1^1.

Обозначим для краткости

$$\begin{array}{lclclclclcl} \theta_1(s_1,\ldots,s_k) & = & a_1 & - & s_1 a_n & - & s_2 a_{n-1} & - & \ldots & - & s_k a_{2m+2-k}, \\ \theta_2(s_1,\ldots,s_k) & = & a_2 & - & s_1 a_1 & - & s_2 a_n & - & \ldots & - & s_k a_{2m+3-k}, \\ \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\ \theta_n(s_1,\ldots,s_k) & = & a_n & - & s_1 a_{n-1} & - & s_2 a_{n-2} & - & \ldots & - & s_k a_{n-k}, \end{array}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Теорема 1. *$L \in NR_0^1$ тогда и только тогда, когда $\hat\Delta_{12\ldots m+1} \neq 0$ и при некоторых значениях $s_1, s_2, \ldots, s_m$, где $s_m \neq 0$, выполняется условие*

(*i*) $\theta_1(s_1,\ldots,s_m) = \theta_2(s_1,\ldots,s_m) = \cdots = \theta_{m+1}(s_1,\ldots,s_m) = 0.$

Теорема 2. *$L \in NR_1$ тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12\ldots m+2} \neq 0$ и при некоторых значениях $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, где $s_{m-1} \neq 0$, выполняется какое-либо одно из следующих условий:*

(*i*) $\theta_1(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \theta_2(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \cdots = \theta_{m+1}(s_1, \ldots, s_{m-1}) = 0$, $\theta_{m+2}(s_1, \ldots, s_{m-1}) \neq 0$, $\theta_n(s_1, \ldots, s_{m-1}) \neq 0$;

(*ii*) $\theta_n(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \theta_1(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \cdots = \theta_m(s_1, \ldots, s_{m-1}) = 0$, $\theta_{m+1}(s_1, \ldots, s_{m-1}) \neq 0$, $\theta_{n-1}(s_1, \ldots, s_{m-1}) \neq 0$.

Теорема 3. *$L \in NR_1^1$ тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12\ldots m+2} \neq 0$ и при некоторых значениях $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, где $s_{m-1} \neq 0$, выполняется какое-либо одно из следующих условий:*

(*i*) $\theta_1(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \theta_2(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \cdots = \theta_{m+2}(s_1, \ldots, s_{m-1}) = 0$,

(*ii*) $\theta_n(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \theta_1(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \cdots = \theta_{m+1}(s_1, \ldots, s_{m-1}) = 0$,

(*iii*) $\theta_{n-1}(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \theta_n(s_1, \ldots, s_{m-1}) = \cdots = \theta_m(s_1, \ldots, s_{m-1}) = 0$.

Для операторов из множества NR_0 полнота системы с.п.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ хорошо известна. Из [3] следует, что этот факт имеет место и для операторов из множеств NR_0^0 и NR_0^1. Оказывается полноту системы с.п.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ можно установить также и для операторов из множеств NR_1, NR_1^0, NR_1^1.

Теорема 4. *Если $L \in NR_1 \cup NR_1^0 \cup NR_1^1$, то система с.п.ф. оператора L полна в пространстве $L_2[0,1]$.*

Доказательство этой теоремы достаточно громоздкое и выходит за рамки данной публикации. Отметим лишь, что при доказательстве применяется метод порождающих функций [5] и схема, использованная в [1].

Список литературы

[1] Рыхлов В. С. *Кратная полнота собственных функций простейшего пучка 5-го порядка* // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-XII), Sept. 18-29, 2001, Sevastopol, Laspi. Vol.12. – Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2002, c. 42–51.

[2] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1968. – 528 с.

[3] Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара имени И.Г. Петровского. Вып. 9. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983, с. 190–229.

[4] Хромов А. П. *Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка* // В сб.: Исследования по теории операторов. – Уфа, 1988, с. 182–193.

[5] Rykhlov V. S. *On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators* // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 7. – Simferopol: Simferopol State University, 1997, p. 70–73.

В.С. Рыхлов, Механико–математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410026, Россия

E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

V. S. Rykhlov *Completeness of the eigenfunctions of some classes of nonregular differential operators*

In the paper we investigate a question of the eigen- and associated functions completeness in the space $L_2[0,1]$ for the simliest ordinary differential operator of the n-th order generated by the differential expression $y^{(n)}$ and the boundary conditions $\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0$, $\nu = \overline{1,n}$.

ON MOMENTS OF A SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STOCHASTIC PERTURBATIONS.

I. I. Kovtun

The investigation of differential equations as well as systems of differential equations whose coefficients are perturbed by stochstic processes, is of a permanent interes. Such systems describe varions practical problems [1].

We consider the system of two first order differential equations

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= (a_{11}(t)+\xi_{11}(t,\omega))y_1(t,\omega)+(a_{12}(t)+\xi_{12}(t,\omega))y_2(t,\omega), \\ \frac{dy_2}{dt} &= (a_{21}(t)+\xi_{21}(t,\omega))y_1(t,\omega)+(a_{22}(t)+\xi_{22}(t,\omega))y_2(t,\omega) \end{cases} \quad (1)$$

and the initial conditions

$$y_1(0,\omega)=y_1^0(\omega), \quad y_2(0,\omega)=y_2^0(\omega). \quad (2)$$

Here the stochastic processes $y_1(t,\omega)$, $y_2(t,\omega)$ satisfy the system (1) for allmost all $\omega \in \Omega$ (Ω is a probality space), $y_1^0(\omega)$, $y_2^0(\omega)$ are random variables; $a_{kj}(t)$ $(k,j=1,2)$ are continuons functions on $[0,T]$; $\xi_{kj}(t,\omega)$ are independent non-Gaussian delta-correlated stochastic processes with the means $<\xi_{kj}(t,\cdot)>$ equal to zero. The comulante functions of the processes $\xi_{kj}(t,\omega)$ have the form

$$K_m^{kj}(t_1,\dots,t_m)=s_m^{kj}(t_1)\delta(t_1-t_2)\cdots\delta(t_{m-1}-t_m) \quad (k,j=1,2),$$

where $\delta(t_s-t_{s+1})$ $(s=1,2,...,m-1)$ are delta-functions.

Let $s_m^{kj}(t)$ are continuons functions, and $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m(m+1)\ s_{m+1}^{kj}$ are uniformly converging series on $[0,T]$.

The solution of problem (1)–(2) is functionals of the processes $\xi_{11}(t,\omega)$, $\xi_{12}(t,\omega)$, $\xi_{21}(t,\omega), \xi_{22}(t,\omega):$ $\quad y_k(t,\omega)=F[\xi_{11}(t,\omega),\ \xi_{12}(t,\omega),\ \xi_{21}(t,\omega),\ \xi_{22}(t,\omega)]$ $\quad (k=1,2)$.

In practice it is offen enough to know two of the first moments of the solution of the system: the expectation and the covariance function.

In [2] we obtained the system of ordinary differential equations for determining means of the solution $<y_1(t,\cdot)>$ and $<y_2(t,\cdot)>$. We find the covariance functions $q_{kj}(t,\tau)=\langle y_k(t,\cdot)y_j(\tau,\cdot)\rangle$ $(k,j=1,2)$ of the solution. Denote by $\hat{q}_{kj}(t,\tau)$ the covariance function of the solution for $t>\tau$, and by $\breve{q}_{kj}(t,\tau)$ the covariance function of the solution for $t<\tau$.

Let us find the system for determining $\hat{q}_{kj}(t,\tau)$. For this end multiply the equations in (1) by $y_1(\tau,\omega)$ and $y_2(\tau,\omega)$ sequentially, and then average. We obtain

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}_{11}}{dt} &= a_{11}(t)\hat{q}_{11}(t,\tau)+a_{12}(t)\hat{q}_{21}(t,\tau)+ \\ &+ \langle\xi_{11}(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot)\rangle+\langle\xi_{12}(t,\cdot)y_2(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot)\rangle, \\ \frac{d\hat{q}_{21}}{dt} &= a_{21}(t)\hat{q}_{11}(t,\tau)+a_{22}(t)\hat{q}_{21}(t,\tau)+ \\ &+ \langle\xi_{21}(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot)\rangle+\langle\xi_{22}(t,\cdot)y_2(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot)\rangle, \\ \frac{d\hat{q}_{12}}{dt} &= a_{11}(t)\hat{q}_{12}(t,\tau)+a_{12}(t)\hat{q}_{22}(t,\tau)+ \\ &+ \langle\xi_{11}(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot)\rangle+\langle\xi_{12}(t,\cdot)y_2(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot)\rangle, \\ \frac{d\hat{q}_{22}}{dt} &= a_{21}(t)\hat{q}_{12}(t,\tau)+a_{22}(t)\hat{q}_{22}(t,\tau)+ \\ &+ \langle\xi_{21}(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot)\rangle+\langle\xi_{22}(t,\cdot)y_2(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot)\rangle. \end{cases} \quad (3)$$

This system is not closed. To "decompose"the correlation of the stochastic processes and the solution, we find the means $<\xi_{kj}(t,\cdot)y_j(t,\cdot)y_i(\tau,\cdot)>$ $(k,j,i=1,2)$. We use the formula [3], which in this situation has the form

$$<\xi_{kj}(t,\cdot)y_j(t,\cdot)y_i(\tau,\cdot)>=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{s_{m+1}^{kj}(t)}{(m-1)!}\Big\langle\frac{\delta^m(y_j(t,\cdot)y_i(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{kj}(t,\cdot)\cdots\delta\xi_{kj}(t,\cdot)}\Big\rangle, \quad (4)$$

where

$$\frac{\delta^m (y_j(t,\omega) y_i(\tau,\omega))}{\delta\xi_{kj}(t,\omega)\cdots\delta\xi_{kj}(t,\omega)} \quad \text{is } m\text{variational derivative} \quad \frac{\delta^m (y_j(t,\omega) y_i(t,\omega))}{\delta\zeta^1_{kj}(t_1,\omega)\cdots\delta\zeta^m_{kj}(t_m,\omega)}$$

by $\zeta^1_{kj}(t_1,\omega),\ldots,\zeta^m_{kj}(t_m,\omega)$ at the points $t_1,\ldots,t_m$ for $\zeta^1_{kj}=\cdots=\zeta^m_{kj}=\xi_{kj}$ and for $t_1=\cdots=t_m=t$.

Substituting (4) into (3), we obtain:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\frac{d\hat q_{11}}{dt} & = & a_{11}(t)\hat q_{11}(t,\tau)+a_{12}(t)\hat q_{21}(t,\tau)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{11}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_1(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{11}(t,\cdot)\cdots\xi_{11}(t,\cdot)}\rangle+\\
 & + & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{12}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_2(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{12}(t,\cdot)\cdots\xi_{12}(t,\cdot)}\rangle,\\
\frac{d\hat q_{21}}{dt} & = & a_{21}(t)\hat q_{11}(t,\tau)+a_{22}(t)\hat q_{21}(t,\tau)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{21}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_1(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{21}(t,\cdot)\cdots\xi_{21}(t,\cdot)}\rangle+\\
 & + & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{22}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_2(t,\cdot)y_1(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{22}(t,\cdot)\cdots\xi_{22}(t,\cdot)}\rangle,\\
\frac{d\hat q_{12}}{dt} & = & a_{11}(t)\hat q_{12}(t,\tau)+a_{12}(t)\hat q_{22}(t,\tau)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{11}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_1(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{11}(t,\cdot)\cdots\xi_{11}(t,\cdot)}\rangle+\\
 & + & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{12}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_2(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{12}(t,\cdot)\cdots\xi_{12}(t,\cdot)}\rangle,\\
\frac{d\hat q_{22}}{dt} & = & a_{21}(t)\hat q_{12}(t,\tau)+a_{22}(t)\hat q_{22}(t,\tau)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{21}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_1(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{21}(t,\cdot)\cdots\xi_{21}(t,\cdot)}\rangle+\\
 & + & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{s^{22}_{m+1}}{(m-1)!}\langle\frac{\delta^m(y_2(t,\cdot)y_2(\tau,\cdot))}{\delta\xi_{22}(t,\cdot)\cdots\xi_{22}(t,\cdot)}\rangle.
\end{array}\right. \tag{5}$$

Using the causality principle, it can be determined the variational derivatives

$$\frac{\delta^m (y_j(t,\omega) y_i(\tau,\omega))}{\delta\xi_{kj}(t,\omega)\cdots\delta\xi_{kj}(t,\omega)}$$

in the same way as we have done in [2]. We have

$$\frac{\delta^m (y_j(t,\omega) y_i(\tau,\omega))}{\delta\xi_{kj}(t,\omega)\cdots\delta\xi_{kj}(t,\omega)} = m!\,y_k(t,\omega)y_i(\tau,\omega) \quad \text{for} \quad k=j, \tag{6}$$

$$\frac{\delta^m (y_j(t,\omega) y_i(\tau,\omega))}{\delta\xi_{kj}(t,\omega)\cdots\delta\xi_{kj}(t,\omega)} = 0 \quad \text{for} \quad k\neq j \qquad (i=1,2), \tag{7}$$

$$\frac{\delta^m (y_k(t,\omega) y_k(t,\omega))}{\delta\xi_{kk}(t,\omega)\cdots\delta\xi_{kk}(t,\omega)} = (m+1)!\,y_k^2(t,\omega) \quad (k,j=1,2). \tag{8}$$

Taking into account (6), (7), we obtain from system (5) the closed system of four ordinary differential equations. It is represented by two systems every of which consists of two equations:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\frac{d\hat q_{11}}{dt} & = & \Big(a_{11}(t)+\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\, s^{11}_{m+1}(t)\Big)\hat q_{11}(t,\tau)+a_{12}(t)\hat q_{21}(t,\tau),\\
\frac{d\hat q_{21}}{dt} & = & a_{21}(t)\hat q_{11}(t,\tau)+\Big(a_{22}(t)+\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\, s^{22}_{m+1}(t)\Big)\hat q_{21}(t,\tau),\\
\frac{d\hat q_{12}}{dt} & = & \Big(a_{11}(t)+\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\, s^{11}_{m+1}(t)\Big)\hat q_{12}(t,\tau)+a_{12}(t)\hat q_{22}(t,\tau),\\
\frac{d\hat q_{22}}{dt} & = & a_{21}(t)\hat q_{12}(t,\tau)+\Big(a_{22}(t)+\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\, s^{22}_{m+1}(t)\Big)\hat q_{22}(t,\tau).
\end{array}\right. \tag{9}$$

The initial condidions for system (9) are dispersions, because $\hat q_{kj}(t,t)=\check q_{kj}(t,t)=q_{kj}(t,t)=D_{kj}(t)$ $(k,j=1,2,\ D_{kj}(t)=D_{jk}(t))$ at the point $t=\tau$.

So, we obtain the system

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}_{11}}{dt} &= \Big(a_{11}(t) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} m\ s_{m+1}^{11}(t)\Big)\hat{q}_{11}(t,\tau) + a_{12}(t)\hat{q}_{21}(t,\tau), \\ \frac{d\hat{q}_{21}}{dt} &= a_{21}(t)\hat{q}_{11}(t,\tau) + \Big(a_{22}(t) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} m\ s_{m+1}^{22}(t)\Big)\hat{q}_{21}(t,\tau) \end{cases} \qquad (10)$$

with the initial conditions

$$\hat{q}_{11}(t,t) = D_{11}(t), \quad \hat{q}_{21}(t,t) = D_{12}(t), \qquad (11)$$

and the system

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}_{12}}{dt} &= \Big(a_{11}(t) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} m\ s_{m+1}^{11}(t)\Big)\hat{q}_{12}(t,\tau) + a_{12}(t)\hat{q}_{22}(t,\tau), \\ \frac{d\hat{q}_{22}}{dt} &= a_{21}(t)\hat{q}_{12}(t,\tau) + \Big(a_{22}(t) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} m\ s_{m+1}^{22}(t)\Big)\hat{q}_{22}(t,\tau) \end{cases} \qquad (12)$$

with the initial conditions

$$\hat{q}_{12}(t,t) = D_{12}(t), \quad \hat{q}_{22}(t,t) = D_{22}(t). \qquad (13)$$

Analogously we can get the system for $t < \tau$, hence for $\breve{q}_{kj}(t,\tau)$.

To find dispersions, we have the system of three differential equations of the form

$$\frac{dD_{11}}{dt} = 2\left[\left(a_{11}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)\ s_{m+1}^{11}(t)\right) D_{11}(t) + a_{12}(t)D_{12}(t)\right],$$

$$\frac{dD_{12}}{dt} = a_{21}(t)D_{11}(t) + a_{12}(t)D_{22}(t) + \left[a_{11}(t) + a_{22}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)\ \left(s_{m+1}^{11}(t) + s_{m+1}^{22}(t)\right)\right] D_{12}(t),$$

$$\frac{dD_{22}}{dt} = 2\left[a_{21}(t)D_{12}(t) + \left(a_{22}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)\ s_{m+1}^{22}(t)\right) D_{22}(t)\right]$$

with the initial conditions

$$D_{kj}(0) = < y_k^0(\cdot) y_j^0(\cdot) > .$$

If $\xi_{k,j}(t,\omega)$ $(k,j = 1,2)$ are Gaussian delta-correlated processes, the system (9) is simplified, because $K_1^{kj}(t) = < \xi_{kj}(t) > = 0$ (by conditions), $K_2^{kj}(t_1,t_2) =$ $< \xi_{kj}(t_1,\cdot)\xi_{kj}(t_2,\cdot) > = s_2^{kj}(t_1)\delta(t_1 - t_2)$, and all the other cumulants $K_m^{kj}(t_1,t_2,\dots,t_m)$ $(m = 3,4,\dots)$ are equal to zero. Thus, the systems (10) and (12) take the forms:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}_{11}}{dt} &= \Big(a_{11}(t) + s_2^{11}(t)\Big)\hat{q}_{11}(t,\tau) + a_{12}(t)\hat{q}_{21}(t,\tau), \\ \frac{d\hat{q}_{21}}{dt} &= a_{21}(t)\hat{q}_{11}(t,\tau) + \Big(a_{22}(t) + s_2^{21}(t)\Big)\hat{q}_{21}(t,\tau) \end{cases}$$

with the initial conditions (11)
and

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}_{12}}{dt} &= \Big(a_{11}(t) + s_2^{12}(t)\Big)\hat{q}_{12}(t,\tau) + a_{12}(t)\hat{q}_{22}(t,\tau), \\ \frac{d\hat{q}_{22}}{dt} &= a_{21}(t)\hat{q}_{12}(t,\tau) + \Big(a_{22}(t) + s_2^{22}(t)\Big)\hat{q}_{22}(t,\tau) \end{cases}$$

with the initial conditions (13).

The system for determiningdispersions in this case is of the form

$$\frac{dD_{11}}{dt} = 2\left[\left(a_{11}(t) + s_2^{11}(t)\right) D_{11}(t) + a_{12}(t)D_{12}(t)\right],$$

$$\frac{dD_{12}}{dt} = a_{21}(t)D_{11}(t) + a_{12}(t)D_{22}(t) + \left[a_{11}(t) + a_{22}(t) + \left(s_2^{11}(t) + s_2^{22}(t)\right)\right] D_{12}(t),$$

$$\frac{dD_{22}}{dt} = 2\left[a_{21}(t)D_{12}(t) + \left(a_{22}(t) + s_2^{22}(t)\right) D_{22}(t)\right]$$

with the initial conditions

$$D_{kj}(0) =< y_k^0(\cdot) y_j^0(\cdot) > .$$

References

[1] Gikhman I.I., Skorohod A.V. The stochastic differential equations and their supplement. -Kiev. Naukova dumka. 1992. 612 p. (in Russian)

[2] Kovtun I.I. On the moments of a two differential equations with stochastic perturbations. Spectral and Evolutions Problems. **8**. Tavria, P. 146–149. 1998.

[3] Klyatckin A.V., Tatarskyi. The statistic means in dynamical systems. Teor. and mathem. physics. 1973. **17**. №2. P. 273–282 (in Russian).

Kovtun I.I.

ON MOMENTS OF A SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STOCHASTIC PERTURBATIONS. II

We consider a system of two ordinary differential equations with stochastic delta-correlations non-Gaussian perturbations. We obtained the closed system of four ordinary differential equations for determining the covariance function of the solution.

Ковтун И.И.

МОМЕНТЫ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ. II

Рассматривается система двух линейных дифференциальных уравнений, возмущенных негауссовскими дельта-коррелированными случайными процессами. Получена замкнутая система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения ковариационной функции решения.

National Agricultural University, ul. Geroev oboroni, 15 Kiev-03041, Ukraine, Associated professor of Mathematics Department

E-mail: ira@otblesk.com

Section 2

EVOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Subsection 2.2

Boundary Value Problems

NUMERICAL METHODS AND ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR A SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

P. M. Lima,
Instituto Superior Técnico,
Centro de Matemática e Aplicações
A. M. Oliveira,
Universidade Nova de Lisboa,
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática,
Portugal

In this paper we analyze a class of equations of the form $y''(x) = -g(x)\ x^p\ (y(x))^q$ *where* p *and* q *are real parameters satisfying* $p > -1$, $q < -1$ *and* g *is a positive and continuous function on* $[0, 1]$.
Keywords: Emden-Fowler equations, singular boundary value problem, finite-difference method, asymptotic error expansions
We search for positive solutions which satisfy the boundary conditions
$y'(0) = y(1) = 0.$
Numerical approximations of the solution are obtained by means of a finite difference scheme and the asymptotic expansion of the discretization error is deduced. Some numerical examples are analyzed.

1. Introduction

In the present paper we consider boundary-value problems for a generalized Emden-Fowler equation of the form

$$y''(x) = -g(x)\, x^p\, y(x)^q, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

where p and q are known real constants and g is continuous and positive on $[0, 1]$. We shall look for positive solutions of this equation on the interval $[0, 1]$, which satisfy certain boundary conditions.

A problem of this type was analysed in [1], with $p = 1$, $q < 0$ and $g(x) = -1/q$. This problem arises in non-newtonian fluid mechanics. The solution of the considered problem has a singularity at $x = 1$ which results from the fact that q is negative and the solution must satisfy

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = 0. \tag{2}$$

The asymptotic behavior of the solutions to this problem near the singularity was analyzed in detail and it was shown that there exists an uniparametric family of solutions of the considered equation which satisfy the required boundary condition at the singularity. The asymptotic expansion of this family was then used to approximate the solutions near the singularities. In this way, we can replace the singular boundary condition at $x = 1$ by a non-singular one at a certain point $x = 1 - \delta$. Then we can approximate numerically the solutions of the considered family, using standard numerical methods for initial-value problems and, by the shooting method, we can find the specific solution which satisfies the boundary condition at $x = 0$, which in this case has the form

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = 0. \tag{3}$$

A different approach for the same problem was developed in [3] and [4]. In these papers, the nonlinear problem is first reduced to a sequence of linear ones, by means of monotone iterative procedures, using a method proposed by Mooney (see [7] and [8]). Then the linear problems are approximated by means of finite difference schemes. In the cited papers, the convergence of the iterative methods was analysed and the asymptotic behavior of the solutions near the singularity was described.

In [5] the considered approach was generalized for a wider class of problems. It was shown that the considered methods can be applied not only to the case $p = 1$, but also for other values of p, such that $p > -1$.

The main purpose of the present paper is to provide a detailed error analysis for the considered methods, in the case where $q < 0$, when the solution is singular at $x = 1$ or at both end points. We derive asymptotic error expansions which are valid for a large range of values of p and q in the case of boundary conditions (2), (3) . We show that these error expansions agree with the previous numerical experiments and use them as a basis for applying extrapolation methods such as the E-algorithm.

In section 2, we review the results obtained in [3] and [5] on upper and lower solutions for the considered problem. In section 3, we define the iterative methods and analyze the asymptotic behavior of the iterates near the singularities. In section 4, we obtain the asymptotic error expansions, using a method similar to the one which was used in [2]. In section 5 some numerical examples are presented. Finally, in section 6 we present the main conclusions of this work.

2. Lower and upper solutions

As defined in previous papers (see for instance [3] and [5]), a lower solution (respect. upper solution) of BVP (1)-(2)-(3) is a function $\widetilde{y}(x) \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ that satisfies the set of conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{y}''(x) + g(x)\, x^p (\widetilde{y}(x))^q \geq 0 \quad (respect. \ \leq 0) \\ \widetilde{y}'(0) \geq 0 \quad (respect. \ \leq \ 0) \quad ; \quad \widetilde{y}(1) = 0 \ . \end{array} \right. \tag{1}$$

We are interested in upper and lower solutions which satisfy (1), and whose asymptotic behavior near the singularity is close to the one of the exact solution.

In order to fit the above conditions, we shall look for upper and lower solutions of the form

$$\widetilde{y}(x) = C\left(1 - x^{p+2}\right)^{\gamma}, \tag{2}$$

where C and γ are adjustable parameters.

By setting

$$\gamma = \frac{2}{1-q}, \tag{3}$$

we assure that $\widetilde{y}(x)$ is asymptotically equivalent to $ky(x)$ when $x \to 1$, where k is a positive constant.

Defining γ as above, by some basic computations, it is possible to find positive constants C_m and C_M, such that, if $C \leq C_m$ (respect. $\geq C_M$), then $\widetilde{y}(x)$ is a lower solution (respect. upper solution).

With the purpose of simplifying the notation, we shall denote by $y_l(x)$ (respect. by $y_u(x)$) a lower solution (respect. upper solution).

The values of C_m and C_M may be resumed in the following table

y_l	y_u	
$C_m = \left(\frac{g_m}{\gamma(p+2)\omega_1}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$	$C_M = \left(\frac{g_M}{\gamma(p+2)\omega_2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$	$if \ \ 0 < \gamma < \frac{1}{p+2}$
$C_m = \left(\frac{g_m}{\gamma(p+2)\omega_2}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$	$C_M = \left(\frac{g_M}{\gamma(p+2)\omega_1}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$	$if \ \frac{1}{p+2} \leq \gamma < 1$

. (4)

Table 2.1 - Bounds for the coefficient C of (2). Here $\omega_1 = (1-\gamma)(p+2)$, $\omega_2 = p+1, g_m = \min_{x\in[0,1]} g(x), g_M = \max_{x\in[0,1]} g(x)$.

A remarkable particular case arises when $g_m = g_M = const = a$ and $\gamma = \frac{1}{p+2}$, that is, when $2p + q = -3$. In this case, we note that $C_m = C_M$, meaning that the lower and upper solution of the problem coincide and give the exact solution:

$$y(x) = \left(\frac{a}{p+1}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(1 - x^{p+2}\right)^{\gamma}. \tag{5}$$

In particular, if we set $p = 1$ and $q = -5$ we get the solution mentioned in [1].

Many theoretical results about nonlinear boundary-value problems for second order equations are aplicable to the considered problem. For example, according to Theorem 7.5 of [9] we can assure that this problem has an unique solution, for all the considered values of the parameters.

3. Iterative methods and asymptotic behavior of the solutions

3.1. **Monotone iterative schemes.** As it was pointed out in [3] and [4], the nonlinear problem (1)-(2)-(3) may be transformed into a sequence of linear ones, using two monotone iterative schemes, based either on the Picard or the Newton methods. Since both mentioned methods converge to the exact solution, for k sufficiently large, the asymptotic behavior of y_k near the singularity will be similar to the asymptotic behavior of y; in this paper, for the asymptotic analysis we shall consider the Picard iterative scheme, which in the case (1)-(2)-(3) has the form

$$\begin{gathered} L\ y_{k+1}(x) = y''_{k+1}(x) + qg(x)\,x^p\,(y_l(x))^{q-1}\,y_{k+1}(x) = g(x)\,x^p y_k(x)\left(q\,(y_l(x))^{q-1} - (y_k(x))^{q-1}\right), \\ y'_{k+1}(0) = y_{k+1}(1) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad k = 0, 1, \ldots . \end{gathered} \tag{1}$$

and $y_l(x)$ is a lower solution of the form (2), with $C = C_m$, where C_m is defined as in Table 2.1.

As it was is shown in [3], if we take as y_0 a lower solution, the iterative scheme (1) converges upwards to the exact solution.

3.2. **Asymptotic behavior of the Picard iterates.** For the error analysis that we shall present in the next section we need some results about the asymptotic behavior of the Picard iterates. These results are obtained in the same way as it was done in [6], and therefore we shall not go here

into details. First we shall analyse the homogeneous equation, associated to (1) :

$$y''(x) + b(x)\,y(x) = 0, \ 0 < x < 1, \tag{2}$$

where

$$b(x) = q\,(C_m)^{q-1}\,g(x)\,x^p\left(1 - x^{p+2}\right)^{-2}. \tag{3}$$

For all the considered values of p and q, equation (2) has a regular singularity at $x = 1$. For $p < 0$, the equation has an irregular singularity at $x = 0$, but if $p = -m/n$ this irregular singularity may be transformed into a regular one by means of the variable transformation $x = t^{1/n}$. In both cases, the roots of the indicial equation associated to (2) can be computed. Let ρ_1 and ρ_2 be the roots of the indicial equation as $x \to 1$, then we have $\rho_1 + \rho_2 = 1$, $\rho_1 < 0$, $\rho_2 > 1$. Using these roots we can express two independent solutions of (2) in the form of series and analyse their behavior. This analysis leads us to the following lemma.

Lemma 1. *Let us consider equation (2), where $q < -1$, $p > -1$ and $g(x)$ are such that the roots of the indicial equation do not differ by an integer not an integer ; if $p < 0$, let p be rational.*

Then, there exists an unique solution α of (2), such that

$$\lim_{x\to 0^+} \alpha(x) = 1 \ \ ; \ \lim_{x\to 0^+} \alpha'(x) = 0 \ \ ; \tag{4}$$

and an unique solution β which satisfies

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{-\rho_2}\beta(x)=1 \quad ; \quad . \tag{5}$$

These solutions are independent and such that

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{-\rho_1}\alpha(x)=\alpha_0 \quad ; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\beta(x)=\beta_0 \ , \tag{7}$$

where α_0 and β_0 are positive finite numbers.

Now the classical method of the Green function enables us to express the Picard iterate y_{k+1}, which is the solution of (1), in terms of the precending iterate y_k and the functions α, β, described in Lemma 1. According to this method we can write

$$y_{k+1}(x)=\int_0^1 G(x;s)f_k(s)ds=\frac{\beta(x)}{\alpha(1)}\int_0^x \alpha(s)f_k(s)ds+\frac{\alpha(x)}{\alpha(1)}\int_x^1 \beta(s)f_k(s)ds, \tag{8}$$

where

$$f_k(x)=g(x)\,x^p y_k(x)\left[q\,(C_m)^{q-1}\left(1-x^{p+2}\right)^{-2}-(y_k(x))^{q-1}\right], \tag{9}$$

Knowing the asymptotic behavior of $y_0(x)$, which is a lower solution, formula (8) and Lemma 1 enable us to obtain the asymptotic properties of the iterates y_k, $k=1,2,...$ These properties are described by the following theorem.

Theorem 1. *Let us consider the sequence of problems (1) with boundary conditions $y'_{k+1}(0)=y_{k+1}(1)=0$, and $p>-1$.*

If $y_0(x)$ is a lower solution of the form (2), then there exist constants $y_{k+1,0}$ and $\overline{y_{k+1,0}}$ such that

$$y_{k+1}(x)=y_{k+1,0}+O\left(x^{p+2}\right) \ , \quad k=0,1,..., \ \text{as } x\to 0^+, \tag{10}$$

and

$$y_{k+1}(x)=\overline{y_{k+1,0}}\,(1-x)^{\gamma}+t_{k+1}(x) \ , \quad k=0,1,..., \ \text{as } x\to 1^-, \tag{11}$$

where $\gamma=\frac{2}{1-q}$ and $t_{k+1}(x)=o\left((1-x)^{\gamma}\right)$.

Moreover, if $\gamma+1<\rho_2$, where ρ_2 is the greatest root of the indicial equation at $x=1$, we have $t_{k+1}(x)=O\left((1-x)^{\gamma+1}\right)$.

4. Discretization methods and asymptotic error expansions

Let $\wp=\{x_i=ih\}_{i=0,...,N}$ be an uniform grid, with $h=1/N$, and $y_{k+1}(x;h):\wp\to\mathbb{R}_0^+$ the discrete function which results from evaluating y_{k+1} at $\wp$.

In order to discretize equations (1), we shall substitute the derivative $y''_{k+1}(x)$ by the corresponding second-order central difference

$$\delta^2 y_{k+1}(x_i;h)=\frac{1}{h^2}\left(y_{k+1}(x_{i+1};h)-2y_{k+1}(x_i;h)+y_{k+1}(x_{i-1},h)\right) \ , \quad i=1,..,N-1. \tag{1}$$

Therefore, for each k, we shall solve a linear system of difference-equations of the form

$$L^h\widetilde{y}_{k+1}=\delta^2\widetilde{y}_{k+1}(x_i;h)+b(x_i)\,\widetilde{y}_{k+1}(x_i;h)=\widetilde{f}_k(x_i;h), \tag{2}$$

where

$$\widetilde{f}_k(x_i;h)=\phi(x_i)\,\widetilde{y}_k(x_i;h)\left(q\,(C_m)^{q-1}\left(1-x_i^{p+2}\right)^{-2}-\left(\widetilde{y}_k(x_i;h)\right)^{q-1}\right) \ , \quad i=1,...,N-1, \tag{3}$$

in order to find the unknown vector $\left(\widetilde{y}_{k+1}(x_i;h)\right)_{i=0,...N}$ which approximates each continuous function $y_{k+1}(x)$, $k=0,1,...$.

The full system must include two equations that are the discrete analogs of the boundary conditions

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{k+1}(0;h) = \widetilde{y}_{k+1}(h;h) \\ \widetilde{y}_{k+1}(1;h) = 0 \quad , \quad k = 0,1,2,... \end{cases} . \tag{4}$$

Let us define, for each iterate $\widetilde{y}_{k+1}(x;h)$, the discretization error

$$\theta_{k+1}(x;h) = \widetilde{y}_{k+1}(x;h) - y_{k+1}(x), \tag{5}$$

for $x \in [0,1]$,$h > 0$.

We shall first consider $k = 0$. As in [6], we shall derive the asymptotic expansion of $\theta_1(x;h)$ as $h \to 0$.

If $\varepsilon_1(x;h)$ is the consistency error of the finite-differences scheme, for the first iterate $y_1(x;h)$, defined as

$$\varepsilon_1(x;h) = \delta^2 y_1(x;h) - y_1''(x), \tag{6}$$

then we have

$$L^h\theta_1(x;h) = -\varepsilon_1(x;h). \tag{7}$$

In order to obtain an asymptotic expansion of $\theta_1(x;h)$ we shall use the same method as in [6]. The outline of this method is the following. Since $\theta_1(x;h)$ is a solution of the difference equation (7) and L^h is an approximation of the linear differential operator L, we look for $\theta_1(x;h)$ in the form

$$\theta_1(x;h) = \mu_1(h)\alpha(x) + \mu_2(h)\beta(x) + \theta_{1p}(x;h) \tag{8}$$

where α and β are the functions referred in Lemma 1 (solutions of the homogeneous equation), θ_{1p} is a particular solution of (7), μ_1 and μ_2 are certain functions of h.

From the asymptotic properties of y_1, described by theorem 1, certain conditions follow that $\theta_1(x;h)$ must satisfy. In particular, making $x = h$ in (8) and considering the boundary condition $y_1'(0) = 0$, we obtain

$$\mu_1(h)\alpha(h) + \mu_2(h)\beta(h) + \theta_{1p}'(h;h) = \overline{B_0}h^{p+1} + o\left(h^{p+1}\right); \tag{9}$$

making $x = 1 - h$ and considering the boundary condition at $x = 1$, we have

$$\mu_1(h)\alpha(1-h) + \mu_2(h)\beta(1-h) + \theta_{1p}(1-h;h) = \overline{C_0}h^{\gamma} + O\left(h^{\gamma+1}\right). \tag{10}$$

On the other hand, a particular solution $\theta_{1p}(x;h)$ of (7) may be computed in the form

$$\theta_{1p}(x;h) = \sum_{i=1}^{m-1}\omega_{2\,i}(x)\,h^{2i} + O\left(h^{2m}\right),$$

where the $\omega_{2\,i}$ coefficients are the solutions of certain boundary value problems. By analysing these coefficients we may conclude that θ_{1p} satisfies the conditions

$$\theta_{1p}'(h;h) = \overline{\theta}_0 h^{p+1} + o\left(h^{p+1}\right), \qquad as \qquad h \to 0 \tag{11}$$

$$\theta_1(1-h;h) = \theta_{1,0}h^{\gamma} + O\left(h^{\gamma+1}\right). \tag{12}$$

From the results of the previous section, it follows that, for some constant α_1, we have $\alpha(1-h) = \alpha_1 h^{\rho_1}(1+o(1))$,as $h \to 0$, where ρ_1 is the least root of the indicial equation, associated to (2). Hence,from (10) we may conclude that

$$\mu_1(h) = \mu_{1,0}h^{\gamma-\rho_1} + o\left(h^{\gamma-\rho_1}\right). \tag{13}$$

In the same way, using (9) and (11) we may conclude that

$$\mu_2(h) = \mu_{2,0}h^{p+1} + o\left(h^{p+1}\right). \tag{14}$$

Finally, if we substitute (13) and (14) into (8), we obtain the desired expression of $\theta_1(x;h)$:

$$\theta_1(x;h) = \widehat{\theta_{1,0}} h^{m_1} + o(h^{m_1}), \tag{15}$$

where

$$m_1 = \min(\gamma - \rho_1, p+1). \tag{16}$$

In order to derive analogous asymptotic error expansions for iterates $k = 2, 3, \ldots$, we may follow a similar procedure as in [6].

Omitting further details, we would conclude that, when $m1 \le 1$, th order of the main term of the discretization error remains the same as in the first iterate. In the cases where $m1 > 1$, the convergence order of the successive iterates will be 1.

In the next section, this conclusion is confirmed by the numerical examples.

5. Numerical results

With the help of a MATHEMATICA code, a wide range of numerical tests were performed for a large range of values of p and q (for the same value of p several values of q were studied).

Our purpose is to compare the theoretical convergence order estimates with the experimental ones.

We focused our attention on the cases $g(x) = 1$ and $g(x) = e^x$.

In the iterative process (2) we have chosen 4 different stepsizes $h_1 = \frac{1}{100}$; $h_{i+1} = \frac{h_1}{2^i}$, $i = 1, 2, 3$, in order to evaluate two different estimates of the convergence order of scheme (2)-(4), one of the estimates being a local one, $e_k(x_j)$, computed at a fixed point x_j $(j \in \{1, \ldots, N-1\})$, and the other, r_k being a global estimate, in terms of error norms.

For each iterate $k = 1, 2, \ldots$, these estimates are defined as

$$e_k(x_j) = \log_2 \frac{|y_k(x_j;h_3) - y_k(x_j;h_2)|}{|y_k(x_j;h_4) - y_k(x_j;h_3)|} \tag{1}$$

and

$$r_k = \log_2 \frac{\max\limits_{j=1,\ldots,N-1} |y_k(x_j;h_3) - y_k(x_j;h_2)|}{\max\limits_{j=1,\ldots,N-1} |y_k(x_j;h_4) - y_k(x_j;h_3)|}. \tag{2}$$

Tables 5.1 , 5.2 (where $g(x) = 1$) and 5.3,5.4 (where $g(x) = e^x$) confirm that, for all fixed values of $p \ge 0$ and for several values of q, there exist no significant discrepancies between the theoretical orders of convergence deduced in the previous section and its estimates given by formulae (1) and (2).

The main term of the asymptotic error expansion remains the same even if the condition $\gamma + 1 < \rho_2$ is not satisfied.

However, for $p < 0$ and when q decreases, the experimental estimates of the convergence order become significantly higher than its expected value.

An explanation for this fact is that, for a fixed negative p, the solution $y(x)$ of (1) satisfies $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) > 1$, so $\lim\limits_{q \to -\infty} y(0)^q = 0$.

Therefore, since $y''(x) = g(x)x^p y(x)^q$, the effect of the singularity at $x = 0$, due to x^p, is in some sense smoothened, and the result is an increasing of the experimental order of convergence.

In all examples concerning the case $g(x) = 1$, for a fixed value of p we have chosen some values of q such that $q \ne -2p - 3$ (we have not considered here the cases where the exact solution is known). The results obtained in the case $g(x) = e^x$ show that, when $p < 0$ the form of p does not affect the convergence order (as it could be expected from the theoretical values). However, when $p < 0$, we obtain for $g(x) = e^x$ a higher convergence order than for $g(x) = 1$, if the same values of p and q are considered.

$\mathbf{p=-0.7}$	$e_1(0.50)$	r_1	m_1
$q=-1.1$	0.3658	0.3617	0.3000
$q=-1.5$	0.3824	0.3700	0.3000
$q=-2.0$	0.4202	0.3912	0.3000
$q=-2.5$	0.4565	0.4067	0.3000
$q=-3.0$	0.4906	0.4177	0.3000

$\mathbf{p=2.0}$	$e_1(0.50)$	r_1	m_1
$q=-1.5$	1.4104	1.2220	1.3724
$q=-2.0$	1.2986	1.1433	1.2847
$q=-4.0$	1.1075	0.9947	1.1042
$q=-6.0$	1.0274	0.9291	1.0250
$q=-8.0$	1.0023	0.9092	1.0000

Tables 5.1,5.2 - Compared values of the estimates of the convergence order, e_1 (at $x = 0.5$) and r_1, and the theoretical convergence order, for some values of p, when $g(x) = 1$.

$\mathbf{p=-0.7}$	$e_1(0.50)$	r_1	m_1
$q=-1.1$	0.3609	0.3581	0.3000
$q=-1.5$	0.3757	0.3649	0.3000
$q=-2.0$	0.4015	0.3824	0.3000
$q=-2.5$	0.4211	0.3948	0.3000
$q=-3.0$	0.4365	0.4032	0.3000

$\mathbf{p=1.0}$	$e_1(0.50)$	r_1	m_1
$q=-1.5$	1.8159	1.5606	1.8571
$q=-2.0$	1.7593	1.5301	1.7995
$q=-2.5$	1.7218	1.5075	1.7563
$q=-4.0$	1.6526	1.4637	1.6747
$q=-6.0$	1.6582	1.4803	1.6774

Tables 5.3 , 5.4 - Compared values of the estimates of the order of convergence, e_1 (at $x = 0.5$) and r_1, and the theoretical convergence order, for some values of p. Here $g(x) = e^x$.

For each h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ the iterative process (2) was stopped at the iterate k_i^* that satisfies

$$\left(\sum_1^N \left|y_{k_{i+1}^*}(x_j; h_i) - y_{k_i^*}(x_j; h_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-7}, \tag{3}$$

6. Conclusions

In this paper we have dealt with a class of singular boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations. We have analyzed the dependence of the solution on two real parameters p and q , and also on a certain regular function g.The theoretical analysis of the problem was based on its reduction to a monotone sequence of linear problems by means of the Picard method. Then we have obtained series expansions of the Picard iterates near the singularities at the endpoints. This approach enabled us to obtain information about the asymptotic behavior of the solution, which agrees with the results obtained in [1] , for a particular case. For the numerical approximation of the linear problems we have applied the finite difference method. Then using the same technique as in [6], we have analyzed the discretization error of this method and obtained formulas for the convergence order. As it could be expected, this order depends on p and q and is closely related to the asymptotic behavior of the solution near the singularities.The lowest convergence order was obtained in the cases where p is negative (in this case, we have shown that the convergence order is $p + 1$).When $p > 0$,the convergence order is not less than 1 and depends strongly on q. These results were obtained theoretically ant then confirmed by numerical experiments. As it was pointed out in

[4], the convergence of the finite-difference methods for singular boundary value problems may be significantly improved by introducing an adequate variable substitution. In some cases, this method provides more accurate results than the ones obtained in the present paper. However, the considered method of variable substitution is not applicable to all the considered cases, for example, it does not work when $p < 0$. In such cases, the best way to obtain an accurate approximation is to apply the finite difference method to the original equation and improve the convergence by means of extrapolation, as proposed in [6].

References

[1] A. L. Dyshko, M. P. Carpentier, N. B. Konyukhova and P. M. Lima, *Singular problems for Emden-Fowler type second-order nonlinear differential equations*, Comput. Maths. Math. Phys. **41** (2001), 557-580.

[2] P. M. Lima, *Numerical methods and asymptotic error expansions for the Emden-Fowler equations*, J. of Comp. and Applied Mathematics **70** (1996) 245-266.

[3] P. M. Lima and M. P. Carpentier, *Iterative methods for a singular boundary-value problem*, J. of Comp. and Applied Mathematics **111** (1999), 173-186.

[4] P. M. Lima and M. P. Carpentier, *Numerical solution of a singular boundary-value problem in non-Newtonian fluid mechanics*, Comp. Phys. Comm. **126** (2000), 114-120.

[5] P. M. Lima and A. M. Oliveira, *Aproximação de problemas de valores de fronteira singulares usando subsoluções e supersoluções* , Tendências da Matemática Aplicada e Computacional (actas da XXII Conferência Nacional de Matemática Aplicada e Computacional)2000, 1, n.2, 401-414 (in portuguese).

[6] P. M. Lima and A. M. Oliveira, *Numerical methods for a singular boundary-value problem for a generalized Emden-Fowler equation* (to appear in Applied Numerical Mathematics).

[7] J. W. Mooney, *A unified approach to the solution of certain classes of nonlinear boundary value problems using monotone iterations*, Nonlinear Analysis **3** (1979), 449-465.

[8] J. W. Mooney, *Numerical schemes for degenerate boundary-value problems*, J. Phys. A **26** (1993) L413-L421.

[9] A. Tineo, *A comparison theorem for second order ODE and applications to singular problems*, Journal of Differential Equations
116 (1995), 16-30.

Pedro Lima, Dep. Matematica, Instituto Superior Tecnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL

E-mail: plima@math.ist.utl.pt

ON SUBORDINATED CONDITIONS FOR A SYSTEM OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE SPACES L_∞

D. V. Limansky
Donetsk National University,
Donetsk, Ukraine

We consider a linear space $L(P_1,\dots,P_N)$ of minimal differential operators subordinated to operators $\{P_j(D)\}_1^N$ in the spaces $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. We obtain a criterion for an operator to be quasielliptic in terms of subordinated conditions.

Keywords: quasielliptic differential operator, Bochner theorem, Fourier — Stieltjes transform

1. Introduction

In the paper under consideration we investigate necessary and sufficient conditions for a minimal differential operator $Q(D)$ to be subordinate to a system of other operators $\{P_j(D)\}_1^N$ in the spaces $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. In other words, we consider the problem of describing the linear spaces $L(P_1,\dots,P_N)$ of minimal differential operators $Q(D)$ obeying the estimate

$$\|Q(D)f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\left[\sum\nolimits_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L_p} + \|f\|_{L_p}\right] \quad \text{for any} \quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

with $p=\infty$ and with some constant C not depending on f. Here $D:=(D_1,\dots,D_n)$, $D_j:=(1/i)(\partial/\partial x^j)$; $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ denotes the set of infinitely differentiable functions with compact support.

It is easy to see that for an arbitrary p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ the condition

$$|Q(\xi)| \leqslant C\left[\sum\nolimits_{j=1}^N |P_j(\xi)| + 1\right], \qquad \xi\in\mathbb{R}^n \tag{2}$$

is necessary for estimate (1) to hold. To prove this, it suffices to substitute in (1) the function $f(x)=g(\varepsilon x)\exp i(x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n)$, where $g\in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(x)=1$ in a neighborhood of the origin, and ε is sufficiently small. If $p=2$, it is easily seen by means of Parseval's formula that (2) is also sufficient for (1) to hold.

V. P. Il'in [5] investigated the case where Q and P_j are monomials and showed that inequality (1) is equivalent to algebraic one (2) for $1<p<\infty$. J. Boman [3] considered just the same problem for $p=\infty$. He obtained a necessary and sufficient condition of geometric nature for estimate (1) to hold. O. V. Besov [1] and M. M. Malamud [8], [9] (see also [2]) obtained a coercivity criterion, i.e., a criterion for the spaces $L(P_1,\dots,P_N)$ to have maximum possible dimension, for operators with variable coefficients in the cases $1<p<\infty$ and $p=\infty$ respectively. In the monograph [12], L. R. Volevich and S. G. Gindikin have investigated, in particular, a priori estimates of the type (1) and their applications for finding local smoothness of solutions of partial differential equations. Finally, M. M. Malamud [9] have established type (1) estimates (with $p=\infty$) for systems of minimal differential operators with variable coefficients.

Next, K. De Leeuw and H. Mirkil [6] treated inequality (1) for $p=\infty$, $N=1$ and $P=P_1$ elliptic. It is well known that if P and Q are partial differential operators with constant coefficients, and P is elliptic, $\deg Q\leqslant \deg P$, then

$$\int |Q(D)f|^2 \leqslant C\int \left(|P(D)f|^2+|f|^2\right) \quad \text{for any} \quad f\in C_0^\infty. \tag{3}$$

The proof of this "a priori estimate"uses Fourier transforms and the Plancherel theorem. Similar estimates are known for p–th powers $(1<p<\infty)$ in place of squares, although the easy proof for $p=2$ does not generalize.

In the present paper we investigate the limiting case $p=\infty$ when estimate (1) takes the form

$$\|Q(D)f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,[\|P(D)f\|_\infty + \|f\|_\infty] \quad \text{for any} \quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Here $\|\cdot\|_\infty$ means a standart uniform norm in $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|.$$

This case turns to be genuinely exceptional. For instance, if $\deg Q = \deg P$ and $Q \neq cP$, then (Proposition 2) an a priori estimate (4) is violated. But if $\deg Q < \deg P$ and P is elliptic, then estimate (4) is reinstated. In fact, in dimension $n \geqslant 3$ this property is characteristic of elliptic operators (Theorem 1), just as the L_2 a priori estimate (3) is characteristic of elliptic operators for the case of equal orders.

The other limiting case $p = 1$ was treated by D. Ornstein [10]. The results for L_1 are essentially the same as those for L_∞. Some counter examples to L_p – estimates of the type (1) were given by M. Littman, C. McCarthy, and N. Rivière [7].

2. Preliminaries and the main theorem

Below, we introduce some important notions and definitions.

Take the set $\mathbb{Z}_+$ of nonnegative integers. If $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, we write

$$\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \qquad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \qquad D_k = (1/i)(\partial/\partial x^k).$$

In addition, we put $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$ whenever $l_1, \dots, l_n > 0$. $\mathbb{C}[\xi]$ is regarded as a ring of polynomials in n real variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ with complex coefficients. An element from $\mathbb{C}[\xi]$ will be written as $\sum a_\alpha \xi^\alpha$.

We denote by $o(t^k)$ a function that satisfies $\lim_{t\to+\infty} \frac{o(t^k)}{t^k} = 0$ and by $O(t^k)$ a function such that the function $\frac{O(t^k)}{t^k}$ is bounded as $t \to +\infty$ (i.e., in a neighborhood of infinity). Here $k \in \mathbb{Z}_+$.

Definition 1. We say that a differential operator $P(D)$ *dominates* an operator $Q(D)$ (or, equivalently, $Q(D)$ is *subordinated* to $P(D)$) if estimate (4) holds true. Such domination we write as the inclusion $Q \in L(P)$.

Definition 2. Let positive numbers $l_1, \dots, l_n$ are being fixed. A polynomial $P^l(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$ of the form

$$P^l(\xi) = \sum\nolimits_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha$$

is said to be l – *homogeneous polynomial* with weights $l_1^{-1}, \dots, l_n^{-1}$, i.e.,

$$P^l\left(t^{1/l_1}\xi_1, \dots, t^{1/l_n}\xi_n\right) = tP^l(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

If numbers $l_1, \dots, l_n$ are natural (i.e., nonzero integer) then we use a notation $[l_1, \dots, l_n]$ for their least common multiple (LCM).

Definition 3. Differential operator $P(D)$ as well as its symbol $P(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$ is called *quasielliptic* if its principal l – homogeneous part $P^l(\xi)$ vanishes nowhere except at the origin, i.e.,

$$P^l(\xi) = \sum\nolimits_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha = 0 \iff \xi = 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

If $l_1 = \dots = l_n$ then both operator $P(D)$ and its symbol $P(\xi)$ are called *elliptic*.

Let us return to key results from [6] and then impose our main assertions.

Theorem 1. [6] *Let P be a polynomial in $n \geqslant 3$ variables, of degree $d \geqslant 2$. Then a necessary and sufficient condition for P to be elliptic is that P dominates all polynomials of degree $\leqslant d-1$. If $n = 2$, the condition is only sufficient.*

Remark 9. In other words, de Leeuw and Mirkil proved that ellipticity of operator P is sufficient for the inclusion $Q \in L(P)$ to be valid for all Q satisfy $\deg Q < \deg P$. They showed that this condition is also necessary for P to be elliptic operator if $n \geqslant 3$, and is not necessary if $n = 2$. Indeed, the operator $P(D) = P(D_1, D_2) = (D_1 + I)(D_2 + I)$ being nonelliptic dominates operators D_1 and D_2. Here I is the identity operator.

The main aim of the paper is to prove the next theorem which generalizes Theorem 1.

Theorem 2. *Let $l = (l_1, \dots, l_n)$, where $\{l_i\}_1^n$ are natural numbers not all equal to each other. Let $P(D)$ be differential polynomial in $n \geqslant 3$ variables with principal l – homogeneous part $P^l(D)$. Then the operator $P(D)$ is quasielliptic if and only if $P(D)$ dominates in $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ all differential polynomials $Q(D)$ of the form*

$$Q(D) = \sum\nolimits_{|\beta:l|<1} b_\beta D^\beta. \tag{5}$$

Remark 10. The latter condition has simple geometrical meaning. Namely, all points $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ corresponding to degrees of monomials $b_\beta \xi^\beta$ from (5) are situated below the hyperplane $x_1/l_1 + \ldots + x_n/l_n = 1$.

3. Auxiliary statements

In this section we state a number of auxiliary assertions which we use through §4.

Proposition 1. [6] The inclusion $Q \in L(P)$ holds if and only if there exist complex – valued integrable measures μ and ν in $\mathbb{R}^n$ such that

$$Q(\xi) \equiv M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

where $M = \hat{\mu}$ and $N = \hat{\nu}$ are Fourier — Stieltjes transforms defined by

$$M(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\lambda}\, d\mu(\lambda), \qquad N(\xi) = \hat{\nu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\lambda}\, d\nu(\lambda).$$

Proposition 2. [9] Let $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l_i > 0$, $P^l(\xi)$ and $Q^l(\xi)$ be principal l – homogeneous parts of $P(\xi)$ and $Q(\xi)$ respectively. Then the inclusion $Q \in L(P)$ implies the identity

$$Q^l(\xi) \equiv cP^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

with some $c \in \mathbb{C}$.

Remark 11. In [6] Proposition 2 was established only in a homogeneous case ($l_1 = \ldots = l_n$). There was also demonstrated a connection between Propositions 1 and 2 in the indicated case. Namely, the relation $c = \mu(0)$ takes place, where $\hat{\mu} = M$. Specifically, it follows that $\mu(0) = 0$ if $\deg Q < \deg P$.

Recall [11] that a complex - valued bounded continuous function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ is said to be *positive definite function* if the matrix $\|f(\lambda_i - \lambda_j)\|_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ is positive for any $k \in \mathbb{N}$ and any $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^k$:

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^k f(\lambda_i - \lambda_j)\xi_i\overline{\xi_j} \geqslant 0, \qquad \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{C}, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^k.$$

Theorem 3. ***(Bochner theorem)*** [11] *Fourier — Stieltjes transforms of all finite positive measures in $\mathbb{R}^n$ form exactly the cone of positive definite functions.*

Lemma 1. *Let μ be a complex – valued finite measure in $\mathbb{R}^n$ and $M = \hat{\mu}$ be its Fourier — Stieltjes transform. Then a restriction of the function M to an arbitrary linear subspace $Z \subset \mathbb{R}^n$ is also a Fourier – Stieltjes transform of some finite measure in Z.*

Доказательство. We can represent the measure μ in the form $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, where $\{\mu_j\}_1^4$ are real – valued positive finite measures. Putting $M_j := \hat{\mu}_j$, $1 \leqslant j \leqslant 4$ we obtain $M = M_1 - M_2 + i(M_3 - M_4)$ and, after restriction to Z, $M|_Z = M_1|_Z - M_2|_Z + i(M_3|_Z - M_4|_Z)$. By Bochner theorem, the functions $\{M_j\}_1^4$ are positive definite, so the functions $\{M_j|_Z\}_1^4$ are positive definite too. By the same theorem, there exist positive finite measures $\{\varkappa_j\}_1^4$ in Z such that $M_j|_Z = \hat{\varkappa}_j$, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Finally, we see that the measure $\varkappa := \varkappa_1 - \varkappa_2 + i(\varkappa_3 - \varkappa_4)$ is finite and satisfies $\hat{\varkappa} = M|_Z$. Q. e. d. $\square$

Lemma 2. *Under restriction of $l-$ homogeneous polynomial P^l to a "coordinate subspace"$Z = \{x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 0,\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n\}$, $\tilde{P}^l := P^l|_Z$ is also l – homogeneous polynomial.*

Доказательство. Let $\tilde{P}^l \not\equiv 0$ and, for instance, $Z = \{x_n = 0\}$. Then P^l isn't divided by x_n. Hence there exist a nonzero monomial that is a part of P^l and doesn't contain the variable x_n. It follows that this monomial being l – homogeneous comes in $\tilde{P}^l$ too.

For general Z we at first restrict the polynomial P^l to the subspace $\{x_{i_1} = 0\}$, then obtained polynomial is restricted to $\{x_{i_2} = 0\}$, etc. Lemma is proved. □

Corollary 1. *If Z is an arbitrary linear subspace in $\mathbb{R}^n$, then the inclusion $Q \in L(P)$ implies the inclusion $Q|_Z \in L(P|_Z)$. In other words, subordination of one operator to other is reserved under restriction of these operators to an arbitrary subspace.*

Доказательство. A proof is immediately follows from Proposition 1 and Lemmas 1, 2. □

Remark 12. It is easy to show that if Z is a subspace preserving l – homogeneity of polynomial P^l (in particular, this happens if Z is a coordinate subspace) and $\dim Z \geqslant 2,\ \alpha|_Z \neq 0$, then $P^l|_Z \not\equiv 0$. If the above conditions on the subspace Z are fulfilled then all our considerations remain valid in a smaller dimension ($\leqslant n-1$). This allow us to maintain our argument by induction on dimension n throughout §4.

Lemma 3. ***(Eberlein lemma)*** [4] *Let μ be an integrable measure, let c be the signed mass of μ of the origin, and let $M = \hat{\mu}$. Then the constant function c can be approximated uniformly by $\pi * M$, with π a probability measure.*

Corollary 2. *If μ is an integrable measure in $\mathbb{R}^n$ and $\mu(0) = 0$ then zero can be approximated uniformly by convex combinations of translates of the function $M = \hat{\mu}$, i.e.,*

$$\sum\nolimits_{k=1}^{m} c_k M(\xi - \xi_k) \rightrightarrows 0, \qquad c_k > 0, \qquad \sum\nolimits_{1}^{m} c_k = 1, \qquad \xi,\ \xi_k \in \mathbb{R}^n.$$

In the sequel, we assume that a polynomial Q is choosen and fixed, and $\deg Q < \deg P$. So functions $M = \mu$ and $N = \nu$ are also fixed in (6) and, by Remark 11, $\mu(0) = 0$.

Definition 4. Consider a family Γ of *"polynomial curves"* in $\mathbb{R}^n$ defined parametrically:

$$x = x(t) := (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}[t], \quad t \geqslant 0.$$

We say that Γ is *an admissible family* if:

1) there is a subfamily $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ such that $\forall \theta \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \tilde{\Gamma} \Longrightarrow x - \theta \in \tilde{\Gamma}$;

2) $\lim_{t \to +\infty} M(x(t)) = 1$ whenever $x = x(t) \in \tilde{\Gamma}$.

Proposition 3. Under above assumptions, there are no admissible families of polynomial curves in $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Suppose Γ is the admissible family. Eberlein lemma yields

$$\exists \theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}, \quad \exists x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n : \quad \Big| \sum\nolimits_{i=1}^{k} \theta_i M(x - x_i) \Big| < 1/2 \quad \text{for any} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Let us substitute an arbitrary polynomial curve $x = x(t) \in \tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ for x in (7). Then $y_i(t) := x(t) - x_i \in \tilde{\Gamma}$ and $\lim_{t \to \infty} M(y_i(t)) = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant k$. Therefore,

$$\Big| \sum\nolimits_{i=1}^{k} \theta_i M(y_i(t)) \Big| < 1/2, \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Turning $t \to \infty$ in both sides of inequality (8), we obtain apparently wrong relation $1 = |\sum_1^k \theta_i| < 1/2$. The contradiction completes the proof. □

We also need the following number-theoretic lemma.

Lemma 4. *Let $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n,\ n \geqslant 2$, and let $[l_1, \ldots, l_n] > l_i \quad \forall i \in [1; n]$. Consider the set I of all $k \in \mathbb{Z}_+^n$ for which $|k : l| = \sum_1^n k_i / l_i < 1$. Then $\max_{k \in I} |k : l| > 1 - (1/\max_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i)$.*

4. Outline of the proof of Theorem 2

M. M. Malamud [9] has already proved the sufficiency of the statement (i.e., that quasiellipticity of P yields the subordination of all Q of the form (5) to P). We prove the necessity.

Suppose the converse, i.e., that $Q \in L(P)$ for all Q of the form (5) but P is not quasielliptic. It follows that $\exists \alpha \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \neq 0 : \quad P^l(\alpha) = 0$. Without loss of generality, we can assume that $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n$. Denote by $d := [l_1, \ldots, l_n]$ the LCM of $l_1, \ldots, l_n$ and put $m_i := d/l_i$, so that $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n$. We write $P(\xi)$ as the decomposition $P(\xi) = P^d(\xi) + P^{d_1}(\xi) + \ldots$, where P^{d_i} are "quasihomogeneous forms of quasidegree d_i". Namely, we mean that each $P^{d_i}(\xi)$, $d_0 := d,\ d_1 > d_2 > \ldots$ is the sum of monomials $a_k \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$ involved in $P(\xi)$ such that $\sum_{j=1}^n m_j k_j = d_i$. In particular, $P^d(\xi) \equiv P^l(\xi)$.

Using identity (6), it is easy to show that $P^{d_1}(\alpha) \neq 0$. So we normalize the polynomial P by setting $P^{d_1}(\alpha) = 1$. Let also

$$u_i := \frac{\partial P^d}{\partial x^i}(\alpha), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{9}$$

Stress that u_i are, in general, complex numbers. Choose $Q(\xi) := P^{d_1}(\xi)$ in (6), so that

$$P^{d_1}(\xi) \equiv M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

4.1. **Case $d > l_i$.** First we consider more simpler case, where $d > l_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$.

Consider the following functions (that define some family $\mathcal{N}$ of polynomial curves):

$$x_i(t) := \alpha_i t^{m_i} + a_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{11}$$

with arbitrary $a_i \in \mathbb{R}$. Substituting functions (11) for ξ in (10) and expanding each polynomial P^{d_i} according to Taylor's formula, we have

$$t^{d_1} + o(t^{d_1}) = M(x(t)) \left[\sum\nolimits_{i=1}^n t^{d-m_i} u_i a_i + t^{d_1} + o(t^{d_1})\right] + N(x(t)), \quad \text{as} \quad t \to +\infty.$$

We note that $d_1 = \max_{k \in I} |k : l|$ (in notations of Lemma (4)) and, by the same lemma, $d_1 > d - m_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$. Thus $P^d(\alpha_1 t^{m_1}, \ldots, \alpha_n t^{m_n}) = o(t^{d_1})$ and

$$t^{d_1} + o(t^{d_1}) = M(x(t)) \left[t^{d_1} + o(t^{d_1})\right] + N(x(t)), \quad \text{as} \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

Dividing both members of (12) by t^{d_1} and turning $t \to \infty$ we obtain $\lim_{t \to +\infty} M(x(t)) = 1$ for any $x(t) \in \mathcal{N}$. Note that functions (11) satisfy all requirements of Definition 4 and hence the family $\mathcal{N}$ defined by these functions is admissible. This contradicts Proposition 3. Theorem 2 is proved if $d > l_i$.

4.2. **Case $d = l_1$.** Now let $d = l_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$. Then $d_i = i, \quad i \in \{1, \ldots, n\},\ m_1 = 1$, $P^{d_1}(\alpha) = P^{d-1}(\alpha) = 1$.

Consider the family $\mathcal{P}$ of polynomial curves defined by

$$x_1(t) := \alpha_1 t + a_1; \quad x_i(t) = \alpha_i t^{m_i} + a_i t^{m_i - 1} + \ldots, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n, \tag{13}$$

with at first arbitrary $a_i \in \mathbb{R}$. Replacing ξ by functions (13) in (10) and expanding each polynomial P^{d_i} according to Taylor's formula, after not complicated computations we obtain

$$t^{d-1} + o(t^{d-1}) = M(x(t)) \left[\left(\sum\nolimits_{i=1}^n u_i a_i + 1\right) t^{d-1} + o(t^{d-1})\right] + N(x(t)), \quad \text{as} \quad t \to +\infty. \tag{14}$$

Dividing both members of (14) by t^{d-1} then turning $t \to \infty$ and taking into account that $M = O(1)$ and $N = O(1)$, we have

$$\lim_{t \to +\infty} \left[M(x(t)) \left(\sum\nolimits_{i=1}^n u_i a_i + 1\right)\right] = 1. \tag{15}$$

Two situations concerning numbers $\{u_i\}_1^n$ (9) are possible.

1. Vectors $\Re u := (\Re u_1, \ldots, \Re u_n)$ and $\Im u := (\Im u_1, \ldots, \Im u_n)$ are not proportional. Then there exist real numbers $\{a_i\}_1^n$ such that $\sum_1^n u_i a_i + 1 = 0$. This contradicts equality (15) and completes the proof of the theorem.

2. Vectors $\Re u$ and $\Im u$ are proportional (including the case when one of them equals to 0). Restrict a choice of numbers $\{a_i\}_1^n$ by the equality

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i a_i = 0. \tag{16}$$

Then (16) implies that $\lim_{t\to\infty} M(x(t)) = 1$, with $x(t)$ satisfy (13).

Let us partition the numbers $\{m_i\}_1^n$ into p groups such that all numbers within each group are equal, i.e.,

$$1 = m_1 = \ldots = m_{j_1} < m_{j_1+1} = \ldots = m_{j_2} < \ldots < m_{j_{p-1}+1} = \ldots = m_{j_p} = m_n,$$
$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p = n.$$

It implies the partition of the sum $\sum_1^n u_i \alpha_i$ into p sums

$$v_k := \sum\nolimits_{i=j_{k-1}+1}^{j_k} u_i \alpha_i, \qquad j_0 := 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Next, we shift the parameter t in (13), i.e., we replace t in functions $x(t)$ (13) by $(t+\tau)^k$, $\quad k \in \{1, \ldots, p\}$, where τ is arbitrary constant. Such shifts give us another functions $\tilde{x}(t)$ that define just the same geometric objects (curves) as $x(t)$ do. Hence, $\lim_{t\to\infty} M(\tilde{x}(t)) = 1$. Combining this with equalities (10), (16) we obtain after some computations that the vector $v := (v_1, \ldots, v_p)$ is a solution of a homogeneous system of p linear equations with a Vandermonde type determinant. It follows that

$$v_k = 0 \quad \text{for any} \quad k \in \{1, \ldots, p\}. \tag{17}$$

Now we can easily complete the proof by induction on dimension n. First we analyze the case $n = 3$ which is the induction base, and see for oneself that Theorem 2 is true (we omit these considerations due to the shortage of space in this paper). Secondly we suppose that $n > 3$ and the theorem holds true for all dimensions k, $\quad 3 \leqslant k \leqslant n-1$, and consider three main cases concerning the vector α.

1) Let $\exists j \in \{1, \ldots, n\} : \quad \alpha_j = 0$. Therefore we can restrict our problem to the subspace $Z := \{x_j = 0\}$, $\dim Z \leqslant n-1$. Then $P^l|_Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$ and, by Corollary 1 and further Remark 12, $P^l|_Z$ dominates (in the dimension $n-1$) all polynomials Q of the form (5). This contradicts the induction hypothesis.

2) Let $\alpha_i \neq 0$, $\quad i \in \{1, \ldots, n\}$ and $1 = m_1 < \ldots < m_n$. Then $0 = v_k = u_k \alpha_k$, $k \in \{1, \ldots, p\}$, $p = n$ and, hence, $u_i = 0$, $\quad i \in \{1, \ldots, n\}$. This means that a choice of parameters $\{a_i\}_1^n$ in (13) is unrestricted and the family $\mathcal{P}$ is admissible.

3) Finally, let $\alpha_i \neq 0$, $\quad i \in \{1, \ldots, n\}$ and $\exists w_1 \neq w_2 : \quad m_{w_1} = m_{w_2}$. It follows that our problem becomes homogeneous within the subspace $Z := \{x_{w_1} = x_{w_2} = 0\}$ (we mean that $l_{w_1} = l_{w_2}$). Thus by suitable linear change of variables in Z (for instance, by rotation about the origin) we can achieve that, for example, $\alpha_{w_2} = 0$. So we can pass to the case considered above (item 1). Theorem 2 is completely proved.

5. Short proof of Theorem 1

In this section we reprove Theorem 1 from [6] by means of techniques developed above.

We consider a homogeneous case:

$$l_1 = \ldots = l_n = d, \qquad m_1 = \ldots = m_n = 1.$$

As above (§4), we are to prove only necessity. Denote by P^k, $0 \leqslant k \leqslant d$, the homogeneous form of degree k involved in P, so that $P = P^d + P^{d-1} + \ldots$. Suppose the polynomial P of degree d dominates all polynomials Q of degree $\leqslant d-1$ in $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$ but P is not elliptic. At that time $\exists\alpha \in \mathbb{R}^n: \quad P^d(\alpha) = 0$, and $P^{d-1}(\alpha) \neq 0$ (we put $P^{d-1}(\alpha) = 1$). Let u, u_i, $\Re u$, $\Im u$, p and v_k be the same as earlier. Consider the family $\mathcal{P}$ with $m_i = 1, \quad i \in \{1, \dots, n\}$, i.e., the family $\mathcal{Q}$ of parallel lines in $\mathbb{R}^n$:

$$x_i(t) := \alpha_i t + a_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{18}$$

Substituting functions (18) in the identity

$$P^{d-1} = MP + N = M(P^d + P^{d-1} + \dots) + N$$

and arguing as in §4, subsection 4.2, we pass to the equality (15). It gives a contradiction if the vectors $\Re u$ and $\Im u$ are not proportional. So let us assume that $\Re u$ and $\Im u$ are proportional. Restrict a choice of $\{a_i\}_1^n$ by equality (16). Besides (see (17)),

$$p = 1, \qquad v_1 = \sum\nolimits_{i=1}^n u_i \alpha_i = 0. \tag{19}$$

It follows from (19), (16) that functions (18) satisfy the linear equation

$$u_1 x_1(t) + \dots + u_n x_n(t) = 0.$$

If $u_1 = \dots = u_n = 0$, there are no restrictions to $\{a_i\}_1^n$ and consequently the family $\mathcal{Q}$ is admissible. At last, if $\exists i \in \{1, \dots, n\}: \quad u_i = 0$, then all parallel lines from $\mathcal{Q}$ lie on the hyperplane h given by the equation

$$(\Re u_1)x_1 + \dots + (\Re u_n)x_n = 0.$$

We see that the family $\mathcal{Q}$ satisfy the requirements of Definition 4 (within h) and hence it is admissible in dimension $n - 1$. Theorem 1 is proved.

Acknowledgements. The author wishes to express the gratitude to his supervisor M. M. Malamud for constant attention to the work and useful discussions.

References

[1] O. V. Besov, *On coercivity in nonisotropic Sobolev spaces* // Math. Sb. **73 (115)** (1967), 585-599, English transl. in Math. USSR Sb. **2** (1967).

[2] O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skiĭ, *Integral Representations of Functions and Embedding Theorems.* M., Nauka, 1996. (Russian)

[3] J. Boman, *Supremum norms for partial derivatives of functions of several real variables* // Illinois J Math. **16**, 2 (1972), 203–216.

[4] W. F. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions* // Trams. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 217–240.

[5] V. P. Il'in, *On the conditions for the validity of unequalities between L_p – norms of partial derivatives of functions of several variables* // Trudy Mat. Inst. Steklov **96** (1968), 205–242. (Russian)

[6] K. de Leeuw, H. Mirkil, *A priori estimates for differential operators in L_∞ norm* // Illinois J Math. **8**, 3 (1964), 112–124.

[7] W. Littman, C. McCarthy, N. Rivière, *L^p – multiplier theorems* // Studia Math, **30** (1968), 193–217.

[8] M. M. Malamud, *An estimate for differential operators in the uniform norm, and coercitivity in Sobolev space* // Soviet. Math. Dokl. **37**, 1 (1988), 25–29. (Russian)

[9] M. M. Malamud, *Estimates for systems of minimal and maximal differential operators in $L_p(\Omega)$* // Trans. Moscow Math. Soc. **56** (1995), 206-261.

[10] D. Ornstein, *A non-equality for differential operators in the L_1 norm* // Arch. Rational Mech. Anal. **11** (1962), 40–49.

[11] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. II: Fourier Analysis, Self – Adjointness.* M., Mir, 1978. (Russian)

[12] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, *Newton's Polygon Method in the Theory of Partial Differential Equations.* M., URSS, 2002. (Russian)

Limansky D. V., Universitetskaya 24, Math. Dept., Donetsk National University, Donetsk, 83055, Ukraine

E-mail: `lim@univ.donetsk.ua`

ON SOME FUNCTIONAL EQUATIONS OF ADDITION THEOREM TYPE

Ekaterina Shulman
Vologda State University,
Vologda, Russia

1. Addition theorems of rational type. We will discuss functional equations of the type

$$f(t+s)=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(t)u_i(s)}{\sum_{j=1}^{m} z_j(t)v_j(s)}. \tag{1}$$

By a solution of (1) we mean a function f for which there exist functions y_i, u_i, z_j, v_j satisfying (1); thus we actually speak about functions that admit an "addition theorem"of rational type. Obviously, we may assume that the functions y_i (as well as u_i, z_j, v_j) are linearly independent.

It should be noted that equation (1) arises in a wide variety of situations. Let us consider how such equations arise in the context of integrable systems of particles on the line. Let $q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t)$ be the coordinates of N particles on the line, interacting with the integrable potential $\sum_{k=1}^{N} U(q_j-q_k)$. Then the dynamics of the systems is describing by the system of ODE

$$\ddot{q}=\sum_{k=1}^{N} U(q_j-q_k), \qquad j=1,2,...,n. \tag{2}$$

We say that a dynamical system admits a Lax representation if it is equivalent to the matrix equation $\dot{L}=[L,M]$, where L and M are matrix-valued functions. It follows from this representation that the $J_k=\frac{1}{k}tr\{L_k\} \quad (k=1,2,...,n)$ are integrals of the system (2). If it is proved that they are independent and in involution, then the system is completely integrable.

So starting with the ansatz for the matrices L and M one seeks restrictions

necessary to obtain equations of motion (2). These restrictions typically involve the study of functional equations. For example, beginning with the ansatz

$$\begin{cases} L_{jk}=p_j\delta_{jk}+g(1-\delta_{jk})A(q_j-q_k), \\ M_{jk}=g\left[\delta_{jk}\sum_{l\neq k} B(q_j-q_l)-(1-\delta_{jk})C(q_j-q_k)\right] \end{cases}$$

one finds that $\dot{L}=[L,M]$ yields the equations of motion (2) for Hamiltonian system

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2+g^2\sum_{j<k} U(q_j-q_k), \qquad U(x)=A(x)A(-x)+const$$

provided that $C(x)=-A'(x)$ and that $A(x)$ and $B(x)$ satisfy the functional equation

$$A(x+y)=\frac{A(x)A'(Y)-A'(x)A(y)}{B(x)-B(y)}. \tag{3}$$

In this sense the functional equation

$$\phi(t+s)=\frac{\alpha(t)\alpha'(s)-\alpha'(t)\alpha(s)}{\beta(t)\beta'(s)-\beta'(t)\beta(s)} \tag{4}$$

is said to be associated with the Lax approach to complete integrability and to the relativistic Calogero-Moser systems.

We will not concentrate on other examples, but note that in all works only analytic solutions of (1) were sought.

2. Reduction to the system of ODEs. Our approach to analysis of such functional equations is based on the reduction of (1) to an overdetermined system of ordinary differential equations. We assume that all functions y_i and z_j are continuously differentiable on some interval $I_1 \in \mathbb{R}$, all functions u_i and v_j are continuously differentiable on some interval $I_2 \in \mathbb{R}$, and the function f is continuously differentiable on some interval $I \subset (I_1 + I_2)$. Let us introduce two notions.

Definition 1. We say that the families $\{y_i\}_{i=1}^n$ and $\{z_j\}_{j=1}^m$ are jointly linearly independent if the family $\{y_i z_j\}_{i,j}$ is linearly independent.

Definition 2. We say that the families $\{y_i\}_{i=1}^n$ and $\{z_j\}_{j=1}^m$ are jointly quadratically dependent if they satisfy the following nontrivial relation

$$\sum_{i,l=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{m} C_{lk}^{ij} y_i(t) z_j(t) y_l(t) z_k(t) = 0$$

where C_{lk}^{ij} are constants.

Theorem 1. *Let families of functions $\{u_i\}$ and $\{v_j\}$ be jointly linearly independent, and let the same be true for families $\{y_i\}$ and $\{z_j\}$. Then functional equation (1) holds for some f if and only if there exist constants C_{lk}^{ij} such that*

$$\begin{cases} y_i' z_j - y_i z_j' = \sum_{l,k} C_{lk}^{ij} y_l z_k, & i \le n; j \le m, \\ u_i' v_j - u_i v_j' = \sum_{l,k} C_{ij}^{lk} u_l v_k, & i \le n; j \le m \end{cases} \tag{5}$$

To demonstrate this approach let us consider a functional equation

$$\frac{f(x+y)}{f(x-y)} = \frac{g(x)+g(y)}{g(x)-g(y)} \tag{6}$$

which was introduced by P. McGill [3] in the work on Brownian motion. He assumed f and g to be meromorphic and found six pairs (f, g) of solutions [4]:
(a) $g(z) = Az$,
(b) $g(z) = A \sin z$,
(c) $g(z) = A \tan z$,
(d) $g(z) = Asn(z; m)$,
(e) $g(z) = Asd(z; m)$,
(f) $g(z) = Asc(z; m)$.
The functions f related to these functions g are found with the aid of the formula $g'(z)/g(z) = 2f'(0)/f(2z)$.

In this work we will look for solutions of (6) in a wider class of functions having two derivatives on some interval of real axis. It will be shown that the general solutions of the equation is

$$f(z) = C(ds(\varepsilon z; k) - cs(\varepsilon z; k)), \qquad g(z) = Bsn(\varepsilon z; k). \tag{7}$$

All McGill's solutions are special or limiting cases of (7).

By differentiating, equation (6) can be easily reduce to the form (1):

$$\frac{f'(x+y)}{f(x+y)} = \frac{g(x)g'(y) - g'(x)g(y)}{g^2(x) - g^2(y)}. \tag{8}$$

It is easy to see that $g(0) = 0$ and $g'(0) \neq 0$ since $f'(x)/f(x) = g'(0)/g(x)$ and f is not constant function. Writing system of differential equations (5) for (8) and taking into account jointly linear independence of the families $\{g, g'\}$ and $\{g^2, 1\}$, we conclude that $c_{21}^{11} = 1, c_{22}^{12} = -1, c_{12}^{22} = -c_{11}^{21}$ and all others coefficients are equal to zero. Thus, the system (5) has the form

$$\begin{cases} g'' = ag + cg^3 \\ g'' g^2 - 2g(g')^2 = bg - ag^3 \end{cases}$$

where $a = c^{21}_{11}, b = c^{21}_{12}, c = c^{21}_{11}$. The last system is equivalent to the equation

$$(g')^2 = \frac{c}{2}g^4 + ag^2 - \frac{b}{2}.$$

Note that $b \neq 0$ since $g'(0) = 0$ and $g(0) = 0$. So, for $y = g\sqrt{-2/b}$ we obtain the differential equation

$$(y')^2 = 1 + ay^2 - \frac{bc}{4}y^4.$$

Its solution is $y(x) = sn(\varepsilon x; k)/\varepsilon$ where $(1 + k^2)\varepsilon^2 = -a, k^2\varepsilon^4 = -bc/4$. Thus,

$$g(x) = \sqrt{-\frac{b}{2}}\,\frac{sn(\varepsilon x; k)}{\varepsilon}. \tag{9}$$

>From the Galley addition theorem for Jacobian elliptic sinus and from (8) we get

$$(\ln f(x))' = \varepsilon / sn(\varepsilon x; k),$$

and consequently (see, for example [9])

$$f(x) = C(ds(\varepsilon x; k) - cs(\varepsilon x; k)). \tag{10}$$

Direct calculations show, that the pair (f, g) obtained by formulas (10) and (9), satisfy the equation (6).

Now it is easy to see that McGill's solutions are particular cases of (10)- (9), corresponding to the following values of parameters k and ε:

(a) $k \to 0$, $\varepsilon \to 0$,
(b) $k \to 0$,
(c) $k = 1$, $\varepsilon = \imath$,
(e) $k = m/(m-1)$, $\varepsilon = \sqrt{1-m}$,
(f) $k = 1 - m$, $\varepsilon = \imath$.

3. The general solution of (1). Basing on the Proposition 1 we can obtain description of the class of functions admitting addition theorem (1). Namely, the following theorem holds.

Theorem 2. *Let f be a function satisfying (1) and let the families of functions $\{u_i\}$ and $\{v_j\}$ be jointly linearly independent. Then, unless the families $\{y_i\}$ and $\{z_j\}$ are jointly quadratically dependent, all y_i and z_j are quasipolynomials up to a common multiplier. Function f itself is also a ratio of quasipolynomials.*

Thus "degenerated"situations are the most interesting ones. Let us consider very important for applications "symmetric"case $m = n = 2$

$$f(t+s) = \frac{y(t)u(s) - u(t)y(s)}{z(t)v(s) - v(t)z(s)}, \tag{11}$$

which includes (4) and (3) and was solved by Buchstaber [1] for analytic f. It is proved in [7], that removing the assumption of analyticity doesn't change the form of solution:

$$F(x) = Ce^{\lambda x}\frac{\Phi(x;\nu_1}{\Phi(x;\nu_2)}, \qquad where \Phi(x;\nu) = \frac{\sigma(\nu - x)}{\sigma(\nu)\sigma(x)}e^{\zeta(\nu)x}.$$

Here $\sigma(x)$ and $\zeta(x)$ are Weierstrass sigma and zeta functions, $\Phi(x;\nu)$ is Baker-Akhiezer function.

4. The Levi-Civita functional equation. If we put $m = 1$ in the equation (1) we lead to Levi-Civita functional equation

$$f(t+s) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)u_i(s) \tag{12}$$

which was originally considered in full generality by Levi-Civita (1913), Stephanos (1904) and Stäkel (1913). It appeared in boundary-value problems of mathematical physics and was solved with the assumption that all unknown functions to be n-times differentiable. In this assumption

(12) may be reduced to a homogeneous linear differential equation of n-th order with constant coefficients. Thus the general solution of (12) is a quasipolynomial of n-th order:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k(t)e^{\lambda_k t}, \qquad \sum_{k=1}^{m}(degP_k + 1) = n.$$

Later on the theory of Levi-Civita equations was extended in various directions. Some interesting problems arise when solutions are considered on general groups or semigroups or on an arbitrary, possibly thin, subsets of the real axis. The most general result for the Levi-Civita equation on semigroup is the following [5]:

Theorem 3. *Let G be a semigroup with the unit and let $f : G \to C$ be a function such that*

$$f(gh) = \sum_{i=1}^{n} y_i(g)u_i(h) \qquad \forall g, h \in G.$$

Then f is a matrix element of n-dimensional representation of G. For locally compact group G the representation can be chosen preserving such properties of solution as boundedness and continuity.

(By a matrix element of representation T of semigroup G in linear space X we mean a function

$$f(g) = \langle T(g)\xi, \eta\rangle,$$

where $\xi \in X, \eta \in X^*$.)

The solutions of Levi-Civita equation have a simple geometric characterization: they are the functions whose orbits under the regular representation belong to finite-dimensional subspaces. Basing on this fact it is possible to prove [6] that Levi-Civita equation are stable when considered in various functional classes on amenable groups. (We mean the Hyers - Ulam concept of stability: an equation is stable when each function "almost satisfying"it is "close"to a proper solution.) The proof relies on the theory of covariant n-widths (that is distances from an invariant convex set to invariant n-dimensional subspaces) which was developed in the same work.

5. Addition theorems in three variables. In conclusion we will note that solution of the Levi-Civita equation may be interpreted as functions for which $f(x + y)$ belongs to algebra of functions generating by functions of one variable. This problem can be generalized for the case of n variables: to describe all functions $f(t)$ such that $f(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ belongs to algebra of functions which depend of less than n variables. As a first step one can consider a functional equation of three variables

$$f(x + y + z) = a_1(x)b_1(y, z) + a_2(y)b_2(x, z) + a_3(z)b_3(x, y). \tag{13}$$

Particular cases of (13) were studied in a lot of works (see, for example, [2]-[8]) and have many applications. Investigation of such functional equations also lead to some interesting semigroup problems.

We will mention here only one result on this subject:

Theorem 4. . *Let f be a continuous complex-valued function admitting an addition theorem (13). Then f is a quasipolynomial.*

References

[1] H. W. Braden, V. M. Buchstaber, *The general analytic solution of a functional equation of addition type*, SIAM J. Math. Anal. 28 (1997), no. 4, 903-923.

[2] Bae Jae-Hyeong, Jun Kil-Woung, ..., Bull. Korean Math. Soc. 38 (2001), no. 2, 325–336.

[3] P. McGill, *Wiener-Hopf factorization of Brownian motion*, Probab. Theory Related Fields 83 (1989), 355–390.

[4] P. McGill, *Jacobi elliptic functions and change of variable in a convolution*, Aequation Math. 39 (1990), 114–119.
[5] E. Shulman, *Functional equations of homological type*, Ph. D. Thesis, Moscow, 1994.
[6] E. Shulman, *Group representations and stability of functional equations*, J. London Math. Soc., 54 (v.2), 1996, 111–120.
[7] E. Shulman, *On rational addition theorems*, to appear in J. Math. Anal. Appl.
[8] Trif T., *Hyiers-Ulam-Rassias stability of a Jensen type functional equations*, J. Math. Anal. Appl. 250 (2000), no. 2, 579–588.
[9] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

Department of Mathematical Analysis, Vologda State Pedagogical University, Orlova Str., 6, Vologda, 160000, Russia

E-mail: shulmank@yahoo.com

Section 3

OPTIMIZATION, CONTROL, GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЗАДАНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕКОММУТИРУЮЩИМИ МАТРИЦАМИ

Е.Н. Хайлов
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе рассматривается множество достижимости однородной билинейной системы $\dot{x} = (A + uB)x$ со скалярным ограниченным управлением. При определенных предположениях показывается, что каждой точке множества достижимости отвечает кусочно-постоянное управление, оценка числа переключений которого связана с размерностью фазового пространства исходной системы. Данный факт обобщает и развивает результаты, полученные ранее в [1-4]. Он позволяет использовать моменты переключений таких управлений для описания множества достижимости рассматриваемой системы.

Рассмотрим билинейную систему со скалярным управлением вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + u(t)B)x(t),\ t \in [0, T], \\ x(0) = x_0,\ x_0 \neq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где A, B - матрицы порядка $n \times n$, $AB \neq BA$ и $x(\cdot) \in \mathrm{R}^n$.

Под классом допустимых управлений $P(T)$ понимаем всевозможные измеримые функции $u(t)$, удовлетворяющие неравенству $0 \leq u(t) \leq \rho$ почти всюду на отрезке $[0, T]$.

Пусть Y есть множество различных действительных матриц порядка $n \times n$.

Обозначим через $[C, D]$ коммутатор матриц $C, D \in Y$ ([5]). Тогда, следуя [6], определим матрицы :

$$[B, A]_1 = [B, A];\ [B, A]_{k+1} = [[B, A]_k, A],\ k \geq 1. \tag{2}$$

Обозначим через $X(T)$ множество достижимости системы (1) из точки x_0 в момент времени T, т.е. множество значений $x(T)$ решений (1), отвечающих всевозможным управлениям $u(\cdot) \in P(T)$.

Известно ([7]), что множество $X(T)$ компактно в R^n.

Рассмотрим матрицу $G_A = E \otimes A - A \otimes E$, где E - единичная матрица, а $C \otimes D$ - кронекерово произведение матриц $C, D \in Y$ ([5]). Пусть $h(\mu) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mu^k$, $l = n^2 - n + 1$ - характеристический многочлен матрицы G_A, деленный на μ^{n-1}, в котором $\alpha_l \neq 0$. В [6] установлено равенство

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k [B, A]_k = 0. \tag{3}$$

Далее, в последующих рассуждениях считаем выполненными следующие предположения.

Condition 1. Ранг матрицы, составленной из векторов $[B, A]_k x_0$, $k = \overline{1, (l-1)}$ равен n.

Condition 2. Для матриц $[[B, A]_k, B]$, $k = \overline{1, (l-1)}$ справедливы представления :

$$[[B, A]_k, B] = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i^k [B, A]_i + \delta^k [B, A]_{k+1},\ k = \overline{1, (l-1)}, \tag{4}$$

где Δ_i^k, $i = \overline{1, k}$; δ^k, $k = \overline{1, (l-1)}$ - некоторые числа.

В работе [8] последнее предположение названо условием Суссмана.

Определим для чисел Δ_i^k, $i = \overline{1, k}$; α_k, δ^k, $k = \overline{1, (l-1)}$ и величины $v \in [0, \rho]$ матрицу $H(v)$ порядка $(l-1) \times (l-1)$ с элементами $h_{i,j}(v)$ следующим образом :

$$h_{i,j}(v) = \Delta_j^i v,\ j = \overline{1, i};\ h_{i,i+1}(v) = 1 + \delta^i v;\ h_{i,j}(v) = 0,\ j = \overline{(i+2), (l-1)} \tag{5}$$

для $i = \overline{1,(l-2)}$ и

$$h_{l-1,j}(v) = \Delta_j^{l-1} v - \frac{\alpha_j}{\alpha_l}(1 + \delta^{l-1} v),\ j = \overline{1,(l-1)}. \tag{6}$$

Пусть выполнены предположения.

Condition 3. Для чисел δ^i, $i = \overline{1,(l-2)}$ имеют место неравенства : $\delta^i > -\rho^{-1}$, $i = \overline{1,(l-2)}$.

Condition 4. При любом $v \in [0,\rho]$ корни $\lambda_i(v)$, $i = \overline{1,(l-1)}$ характеристического многочлена матрицы $H(v)$ вещественные и удовлетворяют неравенствам :

$$\lambda_1(v) \le \nu_1 \le \lambda_2(v) \le \cdots \le \lambda_{l-2}(v) \le \nu_{l-2} \le \lambda_{l-1}(v),$$

где ν_i, $i = \overline{1,(l-2)}$ - постоянные, подчиняющиеся соотношению : $\nu_1 < \cdots < \nu_{l-2}$.

Способы проверки этого предположения ранее обсуждались в [2,9,10].

Теперь от управлений $u(\cdot) \in P(T)$ перейдем к новым управляющим функциям $z(\cdot)$ с помощью замены

$$z(t) = \int_t^T u(\xi) d\xi,\ t \in [0,T]. \tag{7}$$

Очевидно, что $z(T) = 0$ и $u(t) = -\dot{z}(t)$, $t \in [0,T]$.

Обозначим через $Z(T)$ класс всех скалярных абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$ таких, что $z(T) = 0$ и $-\dot{z}(t) \in [0,\rho]$ при почти всех $t \in [0,T]$.

Для произвольного значения $\sigma \in [0,\rho T]$ введем множество :

$$Z_\sigma(T) = \left\{ z(\cdot) \in Z(T) : z(0) = \sigma \right\}.$$

Справедливо следующее равенство :

$$Z(T) = \bigcup_{\sigma \in [0,\rho T]} Z_\sigma(T). \tag{8}$$

Теперь, фиксируем величину $\sigma \in [0,\rho T]$. Обозначим через $Z^*_\sigma(T)$ множество всех таких $z(\cdot) \in Z_\sigma(T)$, что $-\dot{z}(t) \in \{0;\rho\}$ всюду на отрезке $[0,T]$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Заметим, что при $\sigma = 0$, $\sigma = \rho T$ множества $Z_\sigma(T)$, $Z^*_\sigma(T)$ совпадают и состоят из одного элемента : при $\sigma = 0$ - функции $z(t) = 0$, $t \in [0,T]$, а при $\sigma = \rho T$ - функции $z(t) = \rho(T-t)$, $t \in [0,T]$. Для остальных величин $\sigma \in (0,\rho T)$ имеет место утверждение, доказанное в работе [4].

Lemma 1. При каждом значении $\sigma \in (0,\rho T)$ множество $Z^*_\sigma(T)$ всюду плотно в множестве $Z_\sigma(T)$.

Пусть задано значение $\sigma \in (0,\rho T)$. Рассмотрим для некоторого $m \ge 1$ следующие множества :

$$S_m = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_m)^T \in \mathrm{R}^m : 0 \le z_m \le z_{m-1} \le \cdots \le z_2 \le z_1 \le \sigma \right\},$$

$$W_m = \left\{ (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)^T \in \mathrm{R}^m : \tau_j \ge 0, j = \overline{1,m}; \sum_{j=1}^m \tau_j = T - \frac{\sigma}{\rho} \right\},$$

где знак ^{T} означает транспонирование.

Для наборов $(z_1, z_2, \dots, z_m)^T \in S_m$, $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)^T \in W_m$ полагаем :

$$t_1^1 = \frac{\sigma - z_1}{\rho}; t_j^2 = t_j^1 + \tau_j, j = \overline{1,m}; t_{j+1}^1 = t_j^2 + \frac{z_j - z_{j+1}}{\rho}, j = \overline{1,(m-1)}. \tag{9}$$

Заметим, что $0 \le t_1^1 \le t_1^2 \le \dots \le t_m^1 \le t_m^2 \le T$. На отрезке $[0,T]$ определим кусочно-линейную функцию :

$$z(t) = \begin{cases} \sigma - \rho t, & 0 \le t \le t_1^1, \\ z_j, & t_j^1 \le t \le t_j^2, \qquad j = \overline{1,m}, \\ z_j - \rho(t - t_j^2), & t_j^2 \le t \le t_{j+1}^1, \quad j = \overline{1,(m-1)}, \\ z_m - \rho(t - t_m^2), & t_m^2 \le t \le T. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что таким образом заданная функция $z(\cdot) \in Z^*_\sigma(T)$. Из результатов работы [1] следует взаимно однозначное соответствие между всевозможными парами наборов из множеств S_m, W_m при всех $m \ge 1$ и множеством $Z^*_\sigma(T)$.

Рассмотрим теперь точку $y \in X(T)$ такую, что ей отвечает управляющая функция $w(\cdot) \in Z^*_\sigma(T)$ для некоторого $\sigma \in (0, \rho T)$. Из этого включения вытекает существование значения m и наборов $(w_1, w_2, \dots, w_m)^T \in S_m$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T \in W_m$, по которым функция $w(t)$ строится согласно формулам (9),(10). Имеет место утверждение.

Lemma 2. Для определенной выше точки $y \in X(T)$ справедливо представление :

$$y = \mathrm{e}^{\frac{w_m}{\rho}(A+\rho B)} \mathrm{e}^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A} Q_{m-1}(\vartheta_{m-1}) Q_{m-2}(\vartheta_{m-2}) \dots$$
$$Q_2(\vartheta_2) Q_1(\vartheta_1) \mathrm{e}^{\frac{\sigma - w_1}{\rho}(A+\rho B)} x_0, \tag{11}$$

где

$$Q_i(\vartheta_i) = \mathrm{e}^{-\vartheta_i A} \mathrm{e}^{\frac{w_i - w_{i+1}}{\rho}(A+\rho B)} \mathrm{e}^{\vartheta_i A}, \ \vartheta_i = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_i, \ i = \overline{1,(m-1)}. \tag{12}$$

Здесь e^D есть экспоненциал матрицы $D \in Y$ ([11]).

Доказательство. Доказательство данного факта заключается в интегрировании системы (1) для управления $v(t) = -\dot{w}(t)$, $v(\cdot) \in P(T)$, отвечающего точке y, и преобразовании полученного выражения с учетом соотношений (9),(10) и (12). □

Введем множество :

$$\Lambda_{m-1}(T) = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1})^T \in \mathrm{R}^{m-1} : 0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots \le \varphi_{m-1} \le T - \frac{\sigma}{\rho} \right\}.$$

Видим, что фигурирующие в условии леммы 2 значения ϑ_i, $i = \overline{1,(m-1)}$ удовлетворяют включению $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$.

Обозначим через $\operatorname{int}\Omega$, $\partial\Omega$ внутренность и границу компакта $\Omega \subset \mathrm{R}^n$.

Установим справедливость следующего утверждения.

Lemma 3. Существует такая управляющая функция $\bar{w}(\cdot) \in Z^*_\sigma(T)$, отвечающая рассматриваемой точке $y \in X(T)$, что для соответствующих наборов $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m)^T \in S_m$, $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_m)^T \in W_m$ имеет место неравенство $m \le (l-1)$.

Доказательство. Доказательство. Для точки y выполняется представление (11). Не ограничивая общности считаем, что в наборе $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ - все β_i, $i = \overline{1,m}$ положительные и $(w_1, w_2, \dots, w_m)^T \in \operatorname{int} S_m$. Тогда величины, определяемые в (12), подчиняются включению $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{m-1})^T \in \operatorname{int}\Lambda_{m-1}(T)$.

Для того, чтобы установить справедливость желаемого факта предположим, что $m > (l-1)$ и покажем возможность уменьшения значения m до требуемого.

Полагая величины w_i, $i = \overline{1,m}$ фиксированными, рассмотрим на множестве $\Lambda_{m-1}(T)$ систему нелинейных уравнений :

$$F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) = \tag{13}$$
$$\mathrm{e}^{\frac{w_m}{\rho}(A+\rho B)} \mathrm{e}^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A} Q_{m-1}(\chi_{m-1}) Q_{m-2}(\chi_{m-2}) \dots Q_2(\chi_2) Q_1(\chi_1) \mathrm{e}^{\frac{\sigma - w_1}{\rho}(A+\rho B)} x_0 - y.$$

Заметим, что функция $F(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1})$ является аналитической на множестве $\Lambda_{m-1}(T)$. Из (11) вытекает равенство $F(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}) = 0$, которое означает разрешимость уравнения (13).

Далее, столбцы матрицы Якоби системы уравнений (13) выражаются формулами :

$$\frac{\partial F}{\partial \chi_i}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1}) = \mathrm{e}^{\frac{w_m}{\rho}(A+\rho B)}\mathrm{e}^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A}Q_{m-1}(\chi_{m-1})Q_{m-2}(\chi_{m-2})\ldots$$

$$Q_{i+1}(\chi_{i+1})\dot{Q}_i(\chi_i)Q_{i-1}(\chi_{i-1})\ldots Q_2(\chi_2)Q_1(\chi_1)\mathrm{e}^{\frac{\sigma-w_1}{\rho}(A+\rho B)}x_0, \tag{14}$$

$$\dot{Q}_i(\chi_i) = \mathrm{e}^{-\chi_i A}[\mathrm{e}^{\frac{w_i-w_{i+1}}{\rho}(A+\rho B)}, A]\mathrm{e}^{\chi_i A},\ i = \overline{1,(m-1)}.$$

Покажем, что матрица Якоби имеет ранг n в каждой точке $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$. Для этого предположим противное. Пусть нашлась точка $(\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \ldots,\ \bar{\chi}_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$, для которой рассматриваемая матрица Якоби имеет ранг меньший, чем n. Этот факт означает существование для соотношений (14) такого ненулевого вектора $\psi_0 \in \mathrm{R}^n$, что

$$(\frac{\partial F}{\partial \chi_i}(\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \ldots, \bar{\chi}_{m-1}), \psi_0) = 0,\ i = \overline{1,(m-1)}.$$

Эти равенства после надлежащих преобразований приводятся к виду :

$$\int\limits_{\bar{\chi}_i+\frac{\sigma-w_i}{\rho}}^{\bar{\chi}_i+\frac{\sigma-w_{i+1}}{\rho}} ([A+\rho B, A]x(s), \psi(s))ds = 0,\ i = \overline{1,(m-1)}. \tag{15}$$

где $x(t)$ - траектория системы (1), подчиненная управлению $\bar{v}(t)$, отвечающему управляющей функции, построенной по наборам $(w_1, w_2, \ldots, w_m)^T$, $(\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2 - \bar{\chi}_1, \ldots, \bar{\chi}_{m-1} - \bar{\chi}_{m-2}, (T - \frac{\sigma}{\rho}) - \bar{\chi}_{m-1})^T$, а $\psi(t)$ есть решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -(A+\bar{v}(t)B)^T\psi(t),\ t \in [0,T], \\ \psi(T) = \psi_0. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что функция $\bar{v}(t)$ принимает на отрезке $[0,T]$ лишь значения $\{0;\rho\}$ и имеет $2m$ точек разрыва, в которых мы доопределим ее значения соответствующими пределами слева.

Согласно теоремы о среднем ([12]) определены значения :

$$\gamma_i \in (\bar{\chi}_i + \frac{\sigma - w_i}{\rho}, \bar{\chi}_i + \frac{\sigma - w_{i+1}}{\rho}),\ i = \overline{1,(m-1)},$$

через которые равенства (15) с учетом (2) записываются в виде :

$$([B,A]_1 x(\gamma_i), \psi(\gamma_i)) = 0,\ i = \overline{1,(m-1)}. \tag{17}$$

Из определения значений $\bar{\chi}_i$, γ_i, $i = \overline{1,(m-1)}$ следуют неравенства $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{m-1} < T$.

Далее, введем функции :

$$g_k(t) = ([B,A]_k x(t), \psi(t)),\ k = \overline{1,(l-1)}. \tag{18}$$

При этом, видим из (17), что функция $g_1(t)$ имеет $(m-1)$ нуль на интервале $(0,T)$.

Дифференцируя функции $g_k(t)$, $k = \overline{1,(l-1)}$, привлекая при этом системы уравнений (1),(16), равенство (3) и соотношения (4), получим систему линейных дифференциальных уравнений для функций (18) :

$$\begin{cases} \dot{g}_k(t) = \sum_{i=1}^k \Delta_i^k \bar{v}(t)g_i(t) + (1+\delta^k\bar{v}(t))g_{k+1}(t),\ k = \overline{1,(l-2)}, \\ \dot{g}_{l-1}(t) = \sum_{i=1}^{l-1}(\Delta_i^{l-1}\bar{v}(t) - \frac{\alpha_i}{\alpha_l}(1+\delta^{l-1}\bar{v}(t)))g_i(t),\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{19}$$

Заметим, что условия 1,3 гарантируют конечность числа нулей функции $g_1(t)$ на рассматриваемом интервале.

Оценим теперь число нулей функции $g_1(t)$, опираясь на систему уравнений (19). Для этого, привлекая определенную в (5) и (6) матрицу $H(v)$, перепишем систему (19) в матричном виде :

$$\dot{g}(t) = H(\bar{v}(t))g(t),\ t \in [0,T],$$

где $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_{l-1}(t))^T$. Пусть $b = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathrm{R}^{l-1}$.

Рассмотрим векторы

$$q_j(\bar{v}(t)) = ((H(\bar{v}(t)))^T)^{j-1}b, j = \overline{1,l}$$

на каждом интервале постоянства функции $\bar{v}(t)$, $t \in [0,T]$. Введем функцию $\xi(t) = (b, g(t))$, $t \in [0,T]$. Рассуждая далее как и при обосновании теоремы 1 работы [13], находим выражения $\xi^{(j-1)}(t) = (q_j(\bar{v}(t)), g(t))$, $j = \overline{2,l}$, выполняющиеся на интервалах постоянства функции $\bar{v}(t)$, $t \in [0,T]$. Заметим, что на этих интервалах матрица $\Phi(\bar{v}(t))$, составленная из столбцов $q_j(\bar{v}(t))$, $j = \overline{1,(l-1)}$ невырождена в силу условия 3.

Определим функции $r_j(\bar{v}(t))$, $j = \overline{1,(l-1)}$ как решения алгебраической системы уравнений :

$$\Phi(\bar{v}(t)) \begin{pmatrix} -r_{l-1}(\bar{v}(t)) \\ \dots \\ -r_1(\bar{v}(t)) \end{pmatrix} = q_l(\bar{v}(t))$$

на каждом интервале постоянства функции $\bar{v}(t)$, $t \in [0,T]$. Домножая это равенство скалярно на $g(t)$ и учитывая выражения для $\xi^{(i)}(t)$, $i = \overline{0,(l-1)}$, находим линейное дифференциальное уравнение для функции $\xi(t)$:

$$\xi^{(l-1)}(t) + r_1(\bar{v}(t))\xi^{(l-2)}(t) + \dots + r_{l-2}(\bar{v}(t))\xi^{(1)}(t) + r_{l-1}(\bar{v}(t))\xi(t) = 0.$$

Поставим в соответствие этому уравнению обобщенное характеристическое уравнение :

$$\lambda^{l-1}(t) + r_1(\bar{v}(t))\lambda^{l-2}(t) + \dots + r_{l-2}(\bar{v}(t))\lambda(t) + r_{l-1}(\bar{v}(t)) = 0.$$

Заметим, что данное уравнение определено при всех $t \in [0,T]$. Кроме того, при каждом $t \in [0,T]$ это уравнение является характеристическим уравнением матрицы $H(\bar{v}(t))$. Тогда, из условия 4 и следствия 4.2 работы [14] вытекает, что функция $\xi(t) = g_1(t)$ имеет на интервале $(0,T)$ не более $(l-2)$ различных нулей. С другой стороны, она обращается в нуль в точках γ_i, $i = \overline{1,(m-1)}$, $m > (l-1)$. Имеем противоречие. Значит предположение неверно, и для каждой точки $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1})^T \in \Lambda_{m-1}(T)$ ранг матрицы Якоби системы уравнений (13) равен n.

Введем множество индексов :

$$J = \left\{ (j_1, j_2, \dots, j_n) : j_i \in \mathrm{N}, i = \overline{1,n}; 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_n \le (m-1) \right\}.$$

Для каждого набора $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in J$ определим квадратную матрицу :

$$R_{(j_1,j_2,\dots,j_n)}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) =$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial \chi_{j_1}}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) \frac{\partial F}{\partial \chi_{j_2}}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) \dots \frac{\partial F}{\partial \chi_{j_n}}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) \right)$$

и с ее помощью множество :

$$\Omega_{(j_1,j_2,\dots,j_n)}(T) =$$
$$\left\{ (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1})^T \in \mathrm{R}^{m-1} : \operatorname{rang} R_{(j_1,j_2,\dots,j_n)}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}) = n \right\}, \tag{20}$$

где $\operatorname{rang} D$ есть ранг матрицы $D \in Y$.

Известно ([15]), что каждое такое множество либо является областью, либо состоит из объединения попарно непересекающихся областей. Поэтому из сказанного выше следует, что множество $\bigcup_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in J}\Omega_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}(T)$ образует открытое покрытие множества $\Lambda_{m-1}(T)$. Тогда ([16]), существуют такие множества $\Theta_j(T)$, $j=\overline{1,M}$ вида (20), что каждое из них является областью и выполняется включение $\Lambda_{m-1}(T)\subset\bigcup_{j=1}^{M}\Theta_j(T)$. Без ограничения общности считаем, что $(\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{m-1})^T\in\Theta_1(T)$.

Воспользуемся теперь теоремой о глобальной разрешимости системы уравнений (13) ([17]) поочереди на каждом множестве $\Theta_j(T)\cap\Lambda_{m-1}(T)$, $j=\overline{1,M}$, начиная с первого, в котором расположена точка $(\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{m-1})^T$. В результате получим точку $(\chi_1^*,\chi_2^*,\ldots,\chi_{m-1}^*)^T\in\partial\Lambda_{m-1}(T)$, для которой справедливо равенство $F(\chi_1^*,\chi_2^*,\ldots,\chi_{m-1}^*)=0$. Следовательно, в представлении (11) точки y по крайней мере один множитель отсутствует. Этот процесс повторяем снова, перенумеровав различные компоненты χ_i^* и рассматривая их в качестве ϑ_i. Аналогичное следует проделать и с w_i. Это будет происходить до тех пор, пока $m>(l-1)$. В конце концов, представление вектора y будет иметь вид :

$$y=\mathrm{e}^{\frac{\bar{w}_{l-1}}{\rho}(A+\rho B)}\mathrm{e}^{(T-\frac{\sigma}{\rho})A}Q_{l-2}(\bar{\vartheta}_{l-2})Q_{l-3}(\bar{\vartheta}_{l-3})\ldots Q_2(\bar{\vartheta}_2)Q_1(\bar{\vartheta}_1)\mathrm{e}^{\frac{\sigma-\bar{w}_1}{\rho}(A+\rho B)}x_0,$$

где $\{\bar{w}_i\}_{i=1}^{l-1}\in\{w_i\}_{i=1}^{m}$. Поэтому, вычисляя значения $(\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\ldots,\bar{\beta}_{l-1})^T\in W_{l-1}$ и используя формулы (9),(10), находим искомую функцию $\bar{w}(t)$, $t\in[0,T]$. Требуемый факт полностью доказан. □

Установим теперь главное утверждение настоящей работы.

Theorem. Каждой точке $x\in X(T)$ отвечает кусочно-постоянное управление $\bar{u}(t)$, $t\in[0,T]$, принимающее значения $\{0;\rho\}$ и имеющее не более $2(n^2-n)$ переключений на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Доказательство. Точке $x\in X(T)$ отвечает управляющая функция $z(\cdot)\in Z(T)$. В силу (8) такое включение означает, что определена величина $\sigma\in[0,\rho T]$, для которой $z(\cdot)\in Z_\sigma(T)$. Если $\sigma=0$ или $\sigma=\rho T$, то желаемый факт обоснован, поскольку в этих случаях точке x отвечает управление $\bar{u}(t)$, $t\in[0,T]$ без переключений. Пусть теперь $\sigma\in(0,\rho T)$. Согласно лемме 1 для функции $z(t)$ существует последовательность функций $\{w_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}\subset Z_\sigma^*(T)$, которая при $k\to+\infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$ сходится к функции $z(t)$. Тогда, определяя для каждой функции $w_k(t)$, $t\in[0,T]$ соответствующее значение m и наборы $(w_1^k,w_2^k,\ldots,w_m^k)^T\in S_m$, $(\beta_1^k,\beta_2^k,\ldots,\beta_m^k)^T\in W_m$, по формулам (11),(12) находим последовательность векторов $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset X(T)$, отвечающих управляющим функциям $\{w_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}\subset Z_\sigma^*(T)$. Из теоремы 3 работы [18] вытекает сходимость последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ при $k\to+\infty$ к точке x. В силу леммы 3 каждой точке $x_k\in X(T)$ отвечает управляющая функция $\bar{w}_k(\cdot)\in Z_\sigma^*(T)$ такая, что у задающих ее наборов $(\bar{w}_1^k,\bar{w}_2^k,\ldots,\bar{w}_m^k)^T\in S_m$, $(\bar{\beta}_1^k,\bar{\beta}_2^k,\ldots,\bar{\beta}_m^k)^T\in W_m$ величина m удовлетворяет неравенству $m\le(l-1)$. Согласно теореме Арцела ([19]) из последовательности функций $\{\bar{w}_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{\bar{w}_{k_s}(\cdot)\}_{s=1}^{+\infty}\subset Z_\sigma^*(T)$, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,T]$ к функции $\bar{z}(t)$. Причем, для этой управляющей функции имеет место включение $\bar{z}(\cdot)\in Z_\sigma^*(T)$, а у отвечающих ей наборов $(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\ldots,\bar{z}_m)^T\in S_m$, $(\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\ldots,\bar{\tau}_m)^T\in W_m$ величина m подчиняется тому же неравенству $m\le(l-1)$. Пусть точка $\bar{x}\in X(T)$ отвечает управляющей функции $\bar{z}(t)$, $t\in[0,T]$. Снова учитывая результаты работы [18], имеем сходимость соответствующей последовательности $\{x_{k_s}\}_{s=1}^{+\infty}$ при $s\to+\infty$ к точке $\bar{x}$. Поскольку последовательность $\{x_{k_s}\}_{s=1}^{+\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$, то точки $\bar{x}$ и x совпадают. Значит, управляющая функция $\bar{z}(t)$, $t\in[0,T]$ отвечает точке $x\in X(T)$. Теперь уже привлекая формулу (7), можно восстановить требуемое управление $\bar{u}(t)$, $t\in[0,T]$. При этом, заметим, что в найденном для величины m неравенстве $l-1=n^2-n$. Утверждение полностью доказано. □

В заключение автор выражает признательность А.В. Кряжимскому за постояннное внимание к этой работе и плодотворное обсуждение полученных в ней результатов.

Список литературы

[1] Heymann V.I., Kryazhimskii A.V. *On finite-dimensional parametrizations of attainability sets* // Applied Mathematics and Computation. 1996. vol.78, N 2,3. P. 137-151.

[2] Хайлов Е.Н. *Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1998. т.220. С. 217-235.

[3] Хайлов Е.Н. *О решении задачи оптимального управления с терминальным функционалом для однородной билинейной системы* // Вестник Московского университета. Сер.15, Вычислительная математика и кибернетика. 1998. N 1. С. 26-30.

[4] Хайлов Е.Н. *Множество достижимости однородной билинейной системы с квазикоммутирующими матрицами* // Дифференциальные Уравнения. 2002. т.38, N 12. С. 1620-1626.

[5] Прасолов В.В. *Задачи и теоремы линейной алгебры.* М., 1996.

[6] Hajek O., Loparo K.A. *Bilinear control : geometric properties of reachable sets* // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1988. vol.302. P. 262-273.

[7] Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы оптимального управления.* М., 1972.

[8] Вахрамеев С.А. *Теоремы релейности и смежные вопросы* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1998. т.220. С. 49-112.

[9] Либерзон М.Р. *Признак абсолютной устойчивости нестационарных систем* // Автоматика и Телемеханика. 1986. N 2. С. 39-46.

[10] Джури Э. *Инноры и устойчивость динамических систем.* М., 1979.

[11] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М., 1988.

[12] Ильин В.А., Поздняк Э.Г. *Основы математического анализа. Том 1.* М., 1982.

[13] Тонков Е.Л. *Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию* // Дифференциальные Уравнения. 1973. т.9, N 12. С. 2180-2185.

[14] Левин А.Ю. *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // Успехи Математических Наук. 1969. т.24, N 2. С. 43-96.

[15] Елкин В.И. *Редукция нелинейных управляемых систем : Дифференциально-геометрический подход.* М., 1997.

[16] Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа. Том 3.* М., 1989.

[17] Shigeo I. *A note on global implicit function theorems* // IEEE. Transactions on Circuits and Systems. 1985. vol.32, N 5. P. 503-505.

[18] Celikovsky S. *On the representation of trajectories of bilinear systems and its applications* // Kybernetika. 1987. vol.23, N 3. P. 198-213.

[19] Ильин В.А., Поздняк Э.Г. *Основы математического анализа. Том 2.* М., 1980.

E-mail: `khailov@cs.msu.su`

ON SOLVABILITY AND EXTREME REGULARIZATION OF VARIATIONAL INEQUALITIES WITH SET–VALUED OPERATORS

O. V. Solonukha
NTUU "KPI", Kiev, Ukraine

In this paper we modify a solvability theorem for variational inequalities with multivalued operators. We propose also to solve such problems using some special inclusion or a sequence of some extreme problems, so–called "extreme regularization"of problem. These extreme problems consist of inclusions with a parameter and a special penalty function. The extreme regularization method is applied for variational inequalities with set–valued mappings, which has more weak boundedness conditions with respect to ones in previous papers. Results are also applied for variational inequalities with single–valued mappings.

Keywords: variational inequality, inclusion, extreme regularization, penalty function, property (M), quasi–boundedness, local boundedness

1. The variational inequalities theory is powerful and effective tool for studying a wide class of free boundary problems, equilibrium problems, nonlinear optimization problems, etc. These inequalities have important applications to various branches of pure mathematics and applied sciences, in particular, to economics and engineering (see e.g. [3]). Wide class of models consist of essentially set–valued variational inequalities, for example, a family of control problems which are described by variational inequalities, minimax problems, nondifferential optimal problems etc. (see e.g. [1]). The immediate solving of such problems is very difficult. In [5, 7, 8] it was proposed the idea of extreme regularization for variational inequalities that allows to replace a variational inequality by auxiliary extreme problem. In [10] it was shown that for solvability of inclusions and variational inequalities it is sufficient to use weaker boundedness and coercivity conditions than in [2, 6]. In this paper we prove that in that case solution's sets of auxiliary extreme problems coincide with solution's sets of corresponding variational inequality.

2. Let X be a reflexive Banach space, let X^* be its topological dual space, and let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be the duality pairing on $X \times X^*$. Denote by $Conv(X^*)$ the totality of all nonempty convex closed subsets of the space X^*. Let A be a multivalued mapping such that

$$\mathrm{Dom}(A) = \{y \in X : A(y) \neq \emptyset\} = X.$$

Denote $\mathrm{graph}(A) = \{(y, w) \in X \times X^* : w \in A(y)\}$. We introduce upper and lower support functions, and an upper norm associated with A by the formulas

$$[A(y), \xi]_+ = \sup_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle, \quad [A(y), \xi]_- = \inf_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle, \quad \|A(y)\|_+ = \sup_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}.$$

We consider the following variational inequality with set–valued mapping

$$[A(y), \xi - y]_+ \ \geq \ \langle f, \xi - y \rangle \qquad \forall \xi \in K, \tag{1}$$

where $f \in X^*$, $K \subset X$ is a closed convex set, $\dim K = \dim X$.

Since the support functions define the values of operator within a convex closure [4], we use mappings with convex, closed values. Moreover, if variational inequality (1) is solvable and $A(y)$ is bounded, then there exists an element $w \in A(y)$ such that

$$\langle w, \xi - y \rangle \geq \langle f, \xi - y \rangle \qquad \forall \xi \in K$$

(see [6]). Thus we suppose that the values of A are also bounded.

Definition 1. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ is said to be **generalized pseudomonotone** if for arbitrary $(y_n, w_n) \in \mathrm{graph}(A)$ such that $y_n \to y$ weakly in X, $w_n \to w$ weakly in X^*, and $\limsup_{n\to\infty} \langle w_n, y_n - y \rangle \leq 0$ we have $w \in A(y)$ and $\langle w_n, y_n \rangle \to \langle w, y \rangle$ (to within a subsequence).

Definition 2. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ is said to be **quasi–bounded** if for all

$$\{(y, w) \in \text{graph}(A) : \|y\|_X \le k_1, \quad \text{and} \quad \langle w, y - \zeta\rangle \le k_2 \qquad \text{for some } k_1 > 0,\, k_2 > 0,\, \zeta \in X\}$$

there exists a constant $N > 0$ such that $\|w\|_{X^*} \le N = N(k_1, k_2, \zeta) < \infty$.

We also use properties of the mapping A on finite dimensional subspaces. Let $F \subset X$ be an arbitrary finite–dimensional space with a basis $\{h_i\}$ and with a topology, which is induced by topology of X. We introduce a projecting operator $I_F : F \to X$ ($\|I_F y_F\|_X = \|y_F\|_F \,\forall y_F \in F$), and the adjoint operator $I_F^* : X^* \to F^*$. We denote

$$f_F = \sum_{\{h_i\}} \langle f, h_i\rangle h_i, \qquad A_F \equiv A|_F : F \to Conv(X^*),$$

$$I_F^* A_F(y) = \bigcup_{d \in A_F(y)} \left\{ \sum_{\{h_i\}} \langle d, h_i\rangle h_i \right\} \qquad \forall y \in F.$$

Definition 3. A mapping $G : F \to Conv(F)$ is **locally bounded** if for any $y \in F$ there exist $\varepsilon > 0$ and $M > 0$ such that $\sup\limits_{d \in G(\xi)} \|d\|_F \le M$ for any $\xi \in \{\xi \in \text{Dom}(G) : \|\xi - y\|_F \le \varepsilon\}$.

Definition 4. A mapping $G : F \to Conv(F)$ is **upper semicontinuos** if for every $\varepsilon > 0$ and $y \in \text{Dom}(G)$ there exists $\delta > 0$ such that $A(z) \subset A(y) + B_\varepsilon(0)$ for any $z \in B_\delta(y)$, where $B_\varepsilon(0)$ is a ball of center 0 and radius ε.

We also consider some convex bounded set $D \subset X$ such that $\text{dim}D = \text{dim}X$. Let also ζ_0 be an interior point of D with respect to topology of F, i.e. $\zeta_0 \in \text{int}_F(F \cap D) \equiv \text{int}_F D_F$.

3. First we consider a solvability of variational inequalities.

Theorem 1. *Let X be a reflexive Banach space; let $A : K \to Conv(X^*)$ be a quasi–bounded, generalized pseudomonotone operator such that for any finite-dimensional space F a mapping $I_F^* A_F : F \to Conv(F)$ is locally bounded or upper semicontinuous; let $K \subset X$ be a closed, convex set ($\text{dim}K = \text{dim}X$). Moreover, one of the following conditions holds:*

i) (an acute angle's condition) there exist some bounded, convex set D and an element $\zeta_0 \in D \cap K$ such that for any finite–dimensional $F \ni \zeta_0$ we have $\zeta_0 \in \text{int}_F(D \cap K)_F$ and

$$[I_F^* A_F\,(y) - f_F, y_F - \zeta_0]_+ \ge 0 \qquad \forall y \in \partial D_F, \tag{2}$$

where ∂D_F is the boundary of $D_F = D \cap F$ in space F;

ii) K is bounded.

Then a set of solutions for variational inequality

$$[A(y), \xi - y]_+ \;\ge\; \langle f, \xi - y\rangle \qquad \forall \xi \in K \cap D \tag{3}$$

is nonempty and weakly compact in $D \cap K$. Moreover, each solution of (3) is a solution of (1).

Доказательство. We can prove this theorem similarly to Theorem 2 [10] for bounded mappings.

As it was proved in Lemma 2 [10], a solution's set of variational inequality (3) is equal to a solution's set of the following inclusion

$$A(y) + N_K^\lambda(y) \ni f, \qquad \lambda = N(k_1, 0, \zeta_0), \tag{4}$$

where $N : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}_+ \times X \to \mathfrak{R}_+$ is defined in Definition 2, $B_\lambda(0) = \{w \in X^* : \|w\|_{X^*} \le \lambda\}$, and

$$N_K^\lambda(y) := \left\{ w \in B_\lambda(0) \subset X^* : \langle w, \xi\rangle \le 0 \qquad \forall \xi \in \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(y - K) \right\}$$

is a frustum of normal cone. Thus it is sufficient to solve inclusion (4).

The mapping $A + N_K^\lambda$ is quasi–bounded, and $A + N_K^\lambda$ has property (M), since it is a generalized pseudomonotone mapping (see Proposition 2 [9] or §3 [10]). Moreover, $I_F^*(A + N_K^\lambda)_F$ is a sum of upper semicontinuous mappings. Therefore this operator is upper semicontinuous. Hence it is sufficiently to show that condition (2) holds for $A+\lambda N_K^1$ on some bounded convex set $D\cap K$.

By definition, $0\in N_K^\lambda(\xi)$ for $\xi\in K$, $\{0\}=N_K^\lambda(\xi)$ for $\xi\in \mathrm{int}K$, and $[N_K^\lambda(y),y-\zeta_0]_+=\lambda\|y-\zeta_0\|_X>0$ for $y\in\partial K$. If $y_F\in\partial(K\cap F)\subset F$, then $y=I_Fy_F\in\partial K\subset X$. Moreover,

$$[A(y)-f+\lambda N_K^1(y),y-\zeta_0]_+=[A(y)-f,y-\zeta_0]_++\lambda[N_K^1(y),y-\zeta_0]_+. \tag{5}$$

Let we consider the subsets ∂K_{DF} and ∂D_{FK} such that

$$\partial(K\cap D\cap F)=\partial K_{DF}\cup\partial D_{FK},$$
$$\partial K_{DF}=\{y_F\in\partial(K\cap F\cap D):[I_F^*A_F(y_F)-f_F,y_F-\zeta_0]_+<0\},$$
$$\partial D_{FK}=\partial(K\cap D\cap F)\setminus\partial(K\cap F).$$

Obviously, by construction and by condition (2),

$$[I_F^*A_F(y_F)-f_F,y_F-\zeta_0]_+\ge 0 \qquad \forall y_F\in\partial D_{FK}.$$

Moreover, by quasi–boundedness of A, we have estimate $\|A(y_F)\|_+\le N$ for $y_F\in\partial K_{DF}$. Here N is independent of F, since $N=N(k_1,k_2,\zeta_0)$, $k_1\le\sup\limits_{\xi\in D\cap K}\|\xi\|_X$, $k_2=0$.

If we substitute $\lambda=N+\|f\|_{X^*}$ in (5), we obtain for any $y\in\partial K_{DF}$

$$[I_F^*A_F(y_F)-f_F+I_F^*(N_K^\lambda)_F(y_F),y_F-\zeta_0]_+\ge\big(-N-\|f\|_{X^*}+\lambda\big)\|y-\zeta_0\|_X=0.$$

Therefore, for arbitrary F

$$[I_F^*A_F(y_F)-f_F+I_F^*(N_K^\lambda)_F(y_F),y_F-\zeta_0]_+\ge 0 \quad \text{for}\, y\in\partial(K\cap D\cap F).$$

By Theorem 2 [10], there exists $\hat y\in K\cap D$ such that $f\in A(\hat y)+N_K^\lambda(\hat y)$.

If K is bounded, we can set $K\cap D=K$.

It remains to prove that the solution set is weakly compact in K $(K\cap D)$. Let $y_n\to y$ weakly in X, and let y_n satisfy (3). Since $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle f,y_n-y\rangle\le 0$, using property (M), we have $f\in A(y)+N_K^\lambda(y)$. Thus the set of solutions is weakly compact. □

Definition 5. A mapping $A:X\to Conv(X^*)$ is "$+$" $-$ **coercive (coercive)** if

$$\|y\|_X^{-1}[A(y),y-\zeta_0]_{+(-)}\to\infty \qquad \text{as}\, \|y\|_X\to\infty.$$

Obviously, "the acute angle's condition"(2) is weaker than coercivity condition or "$+$" $-$ coercivity condition (see e.g. [4, 6, 10]). If A is "$+$"–coercive, it satisfies the "acute angle's condition (2) on some ball $B_R(\zeta_0)$. If A is coercive, it is "$+$"–coercive and there exists some ball $B_{\widetilde R}(\zeta_0)$ such that inequality (1) has no solutions outside of this ball (see e.g. [2, 4, 6, 9, 10]).

4. In general, the mapping N_K^λ (or $A+N_K^\lambda$) can have rather complicated form. In this case we can use the extreme regularization method.

Definition 6. A function $\beta:X\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ is **lower semicontinuous** if

$$\liminf_{y_n\to y}\beta(y_n)\ge\beta(y).$$

Let us construct a penalty function

$$F(y,v)=\sup_{\xi\in K\cap D\cup\{y\}}\langle v,y-\xi\rangle+\beta(y)\equiv[v,y-K\cap D\cup\{y\}]_++\beta(y),$$

where y is a solution of the following inclusion

$$A(y)\ni f+v, \tag{6}$$

$\beta(y)=I_{K\cap D}(y)$ is an indicator of the set $K\cap D$. We can use an arbitrary lower semicontinuous function $\beta\ge 0$ such that $\beta(y)>0$ if $y\notin K\cap D$, and $\beta(y)=0$ if $y\in K\cap D$.

Now we can consider the following extreme problem

$$F(v,y)=\sup_{\xi\in K\cap D\cup\{y\}}\langle v,y-\xi\rangle+\beta(y)\to\inf_{v\in B_\lambda(0),y\in\rho(v)}, \tag{7}$$

where ρ is the solving mapping for inclusion (6), i.e. any $y\in\rho(v)$ satisfies (6).

Lemma 1. *Let problems (3) and (7) have solutions. Then y is a solution of (3) iff there exists v such that (y, v) is a solution of (7).*

Доказательство. Let y be a solution of (3). Then $\langle v, \xi - y\rangle \geq 0$ for arbitrary $\xi \in K \cap D$ and $\beta(y) = 0$, i.e. $F(v, y) = 0$. By construction,

$$F(v, y) \geq [v, y - D \cap K \cup \{y\}]_+ \geq \langle v, y - y\rangle = 0,$$

i.e. F is nonnegative. Thus (y, v) is a solution of (7).

Let (y, v) be a solution of (7). The function F is lower bounded by 0. By conditions of lemma, variational inequality (3) has at least one solution. Thus there exists a pair $(\hat{y}, \hat{v})$ such that $F(\hat{y}, \hat{v}) = 0$, i.e. a lower limit of values for F is accesible. Since (y, v) is a solution of (7), we obtain that $F(y, v) = 0$, $[v, y - K \cap D \cup \{y\}]_+ = 0$, and $\beta(y) = 0$ (i.e. $y \in K \cap D$). Thus y is a solution of (3). □

The problem (3) is solvable. Let us show that the extreme problem (7) is solvable too.

Theorem 2. *Let $K \subset X$ be a closed convex set,* $\dim K = \dim X$. *And let $A : X \to Conv(X^*)$ be a generalized pseudomonotone and quasi–bounded mapping such that for any finite-dimensional space F a mapping $I_F^* A_F : F \to Conv(F)$ is locally bounded or upper semicontinuous. Moreover, let K be bounded, or let A be " + "–coercive. Then for all $f \in X^*$ problem (7) has at least one solution.*

Доказательство. Since A is a " + "–coercive mapping, then for any $f, v \in X^*$ there exists a convex, bounded set D_v such that

$$[I_F^* A_F\,(y) - f_F - v_F, y_F - \zeta_0]_+ \geq 0 \qquad \forall y \in \partial(D_v)_F.$$

Thus by Theorem 2 [9], for each $v \in X^*$ there exists a solution of inclusion (6). Moreover, since we consider $v \in B_\lambda(0)$, then it is sufficient to choose a convex, bounded set $\widetilde{D}$, when $I_F^* A_F$ satisfies the strong acute condition (8). Such set exists by " + "–coercivity of mapping A. Hence for any $v \in B_\lambda(0)$ there exists $y(v) \in \widetilde{D}$, which satisfies inclusion (6). Therefore we can consider the function F on bounded set $B_\lambda(0) \times \widetilde{D}$. This function is bounded from below ($F(v, y) \geq 0$), and a lower limit of values is accesible. Let us consider a minimizing sequence $\{(v_n, y_n)\}$: $F(v_n, y_n) \to 0$. We denote $\xi_n = \operatorname{argsup} \sup\limits_{\xi \in K \cap D \cup \{y\}} \langle v_n, y_n - \xi\rangle$. By construction, the sequences $\{v_n\}$, $\{y_n\}$, and $\{\xi_n\}$ are bounded. Thus on reflexive Banach spaces there exist weakly convergent subsequences. Let $(y_m, v_m) \to (y, v)$ weakly on $X \times X^*$, where

$$\limsup_{m\to\infty} \langle v_m, y_m - y\rangle \leq \limsup_{m\to\infty} \langle v_m, y_m - \xi_m\rangle \leq \lim_{m\to\infty} F(v_m, y_m) = 0.$$

Since A is a generalized pseudomonotone map, we obtain $\langle v_m, y_m\rangle \to \langle v, y\rangle$ and $v + f \in A(y)$. Let us assume that $y \notin K \cap D$. But $K \cap D$ is weakly closed, i.e. there exist a neighborhood $U_y \subset X \setminus (K \cap D)$ in weak topology X and a number n_y such that $\{y_m\}_{m \geq n_y} \subset U_y$. Thus $\liminf\limits_{m\to\infty} \beta(y_m) \geq \beta(y) > 0$. Hence y_m can not belong to a minimizing sequence. We obtain the contradiction. Consequently, y belongs to $K \cap D$ and satisfies (3) and $F(v, y) = 0$. □

Corollary 1. *Let $K \subset X$ be a unbounded, closed, convex set,* $\dim K = \dim X$. *And let $A : X \to Conv(X^*)$ be a generalized pseudomonotone and quasi–bounded mapping such that for any finite-dimensional space F a mapping $I_F^* A_F : F \to Conv(F)$ is locally bounded or upper semicontinuous. Moreover, let A satisfy so-called "strong acute angle's condition"*

there exist some bounded, convex set $\widetilde{D}$ and an element $\zeta_0 \in \widetilde{D} \cap K$ such that for any finite–dimensional $F \ni \zeta_0$ we have that $\zeta_0 \in \operatorname{int}_F(\widetilde{D} \cap K)_F$ and

$$[I_F^* A_F\,(y) - f_F, y_F - \zeta_0]_+ \geq \lambda \|y_F - \zeta_0\|_F \qquad \forall y \in \partial \widetilde{D}_F, \tag{8}$$

where $\partial \widetilde{D}_F$ is the boundary of $\widetilde{D}_F = \widetilde{D} \cap F$ in space F.

Then problem (7) has at least one solution.

Remark 13. Let K be a closed convex cone with corner at y_0, and let $\dim K = \dim X$. Then variational inequality (1) defines the following complementary problem

$$\text{find a pair } (y, d), \text{ where } y \in K,\ d \in K^* \cap A(y) - f,$$
$$K^* = \{w \in X^* : \langle w, \zeta - y_0 \rangle \geq 0 \qquad \forall \zeta \in K\}.$$

Thus we can modify the penalty function from (7)

$$F(v, y) = |\langle v, y - y_0 \rangle| + \beta(y)$$

(see [5]). In this case the results of Section 4 hold.

Remark 14. Note that in a definition of F. Browder [2] it was assumed that generalized pseudomonotone operators have restrictions to any finite-dimensional subspace that are upper semicontinuous.

References

[1] J.P.Aubin, *Optima and Equilibria,* Springer-Verlag, N-Y, 1993.

[2] F. E. Browder, Hess P., *Nonlinear Mappings of Monotone Type in Banach Spaces.* – Journal of Functional Analysis, 1972, V.11, N 2, pp. 251-294.

[3] J. Duveat and J.L.Lions, *Sur les Inéquations en Mécanique et en Physique,* Dunod, Paris, 1972.

[4] V. S. Mel'nik, O. V. Solonoukha, *On Stationary Variational Inequality with Multivalued Operators.* – Kibernetica i systemny analis, 1997, No.3, pp. 74–89; English transl. in Cybernetics and System Analysis, V. 33, No.3, 1997, pp.366-378.

[5] O. V. Solonoukha, *On Extremal Problem of the Variational Inequalities Regularization.* – Applied Mathematics and Computer Science, 1996, V. 6, No 4, pp. 733–752.

[6] O. V. Solonoukha, *On the Stationary Variational Inequalities with the Generalized Pseudomonotone Operators.* – Methods of Functional Analysis and Topology, 1997, V. 3, No 4, pp.81–95.

[7] O. V. Solonoukha, *On Extremal Regularization of Optimization Problems, which are Described by Variational Inequalities with Multivalued Operators.* – Kibernetika i Sistemnii Analis, 1998, V.119, pp. 14–30 (in Russian).

[8] O. V. Solonoukha, *On Extremal Regularization of the Variational Inequalities with Multivalued Operators.* – Birkhauser, Operator Theory: Advances and Applications, 2000, V.117, pp. 359–370.

[9] O. V. Solonukha, *On Solvability of Monotone Type Problems with Non-Coercive Set-Valued Operators*, – Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 6, No 2, 2000, pp. 66–72.

[10] O. V. Solonoukha, *On Partial Coercive Monotone Type Problems.* – Uchenie zapiski Tavricheskogo natsional'nogo universiteta im. V.I.Vernadskogo, ser. Matematika. Mehanika. Informatika i kibernetika, 2002, V. 15(54), No 1, pp. 148–154.

O. V. Solonukha, Department of Mathematical Simulation of Economical Systems, National Technical University of Ukraine "KPI", Pr. Peremogy 37, Kiev, 03056, Ukraine.

E-mail: `olessias@zeos.net`

1991 *Mathematics Subject Classification* 47H04, 49J40, 35R35, 35R70
2000 *Mathematics Subject Classification* 47, 35, 39

EXISTENCE OF GUARANTEED SOLUTION FOR MULTICRITERIA PROBLEM

V.I. Zhukovskiy, S.N. Sachkov, E.N. Sachkova
RCITLI, Russia

Conditions for guaranteed solution existence in a multicriteria dynamical problem under uncertainty are obtained.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

Let us consider N-criteria dynamical problem under uncertainty

$$< \mathbf{\Sigma}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \{J^{(i)}(u,v)\}_{i\in\mathbf{N}} > . \tag{1}$$

The controlled system Σ changing in time t is described by the vector differential equation

$$\dot{x} = \phi(t,x,u,v), \quad x(t_*) = x_*. \tag{2}$$

The phase vector $x \in \mathbf{R}^n$, the starting moment $t_* \geq 0$ and the time of process finishing $\vartheta > t_*$ are fixed; the time $t \in [t_*, \vartheta]$. The PMD's (person making decisions) control action is $u \in \mathbf{R}^r$, an uncertainty effect is $v \in \mathbf{R}^q$. Assume that the set $\mathcal{U}$ of controls $u(t), t \in [t_*, \vartheta]$, and the set $\mathcal{V}$ of uncertainties $v(t), t \in [t_*, \vartheta]$, are convex, closed and bounded subsets of $L_2^r[t_*, \vartheta]$ and $L_2^q[t_*, \vartheta]$ respectively with nonempty interior.

Moreover let the right part of (2) be such that for all $u(\cdot) = \{u(t), t_* \leq t \leq \vartheta\} \in \mathcal{U}$ and $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ the system (2) (where $u = u(t)$ and $v = v(t)$) has a unique solution $x(t)$ continuous and extendable on the interval $[t_*, \vartheta]$ and satisfying (2) for almost all $t \in [t_*, \vartheta]$ (you can find such restrictions for $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ and $\phi(t,x,u,v)$ in [1,2]). The quality of system Σ functioning is valued by the vector criterion $J(u,v) = (J^{(1)}(u,v), ..., J^{(N)}(u,v))$, where the functionals

$$J^{(i)}(u,v) = \Phi^{(i)}(x(\vartheta)) + \int_{t_*}^{\vartheta} F^{(i)}(t,x(t),u(t),v(t))dt, \quad i \in \mathbf{N} = \{1,..,N\} \tag{3}$$

are determined on the triples $(x(t), u(t), v(t))$, $t \in [t_*, \vartheta]$. Assume, that the scalar functions $\Phi^{(i)}(x)$,$F^{(i)}(t,x,u,v)$ $(i \in \mathbf{N})$ are continuous.

The process of decision making in (1) happens as follows. PMD chooses and uses a control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Irrespectively of this choice some uncertainty $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ effects the system Σ. Then the solution $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, is constructed for system (2) for $u = u(t)$, $v = v(t)$. On the sets $(x(t), u(t), v(t)|\ t \in [t_*, \vartheta])$ N criteria (3) are determined. In terms of "meaning"the PMD's objective point in the problem (1) is to choose his control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ so that all N criteria (3) take the largest possible values simultaneously. In addition when choosing his control the PMD should allow for emerging of any uncertainty $v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

For formalization of the solution to the problem (1) we shall use the notion of optimum by Geoffrion (see [3]) from the multicriteria problem theory [4].

Definition. The couple $(u^G(\cdot), J^G) \in \mathcal{U} \times \mathbf{R}^N$ is called the *Geoffrion guaranteed solution of multicriteria problem under uncertainty* (1) if there exists an uncertainty $v^G(\cdot) \in \mathcal{V}$ such that $J^G = J(u^G, v^G)$ and

1^0 the control $u^G(\cdot) \in \mathcal{U}$ is maximal by Geoffrion in multicriteria problem

$$< \mathbf{\Sigma}(v = v^G), \mathcal{U}, J(u, v^G) >, \tag{4}$$

obtained from (1) by fixing $v(\cdot) = v^G(\cdot) \in \mathcal{V}$.

2^0 the uncertainty $v^G(\cdot) \in \mathcal{V}$ is minimal by Geoffrion in a multicriteria problem

$$< \mathbf{\Sigma}(u = u^G), \mathcal{V}, J(u^G, v) > \tag{5}$$

obtained from (1) by fixing $u(\cdot) = u^G(\cdot) \in \mathcal{U}$. The couple $(u^G(\cdot), v^G(\cdot))$ is said to be a *saddle point by Geoffrion* in the problem (1).

Remark 1. PMD using the control $u^G(\cdot) \in \mathcal{U}$ provides himself a vector guarantee J^G. Namely, whatever uncertainty $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ is realized in the problem (1), the components of the vector criterion $J(u^G, v)$ obtained so far can not become smaller simultaneously than the corresponding components of the vector guarantee J^G. That is why the solution of the problem (1) is determined in the form of the couple $(u^G(\cdot), J^G)$.

Remark 2. According to the given definition to construct the Geoffrion guaranteed solution $(u^G(\cdot), J^G)$ for the problem (1) one must find a saddle point by Geoffrion $(u^G(\cdot), v^G(\cdot)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ for this problem.

Remark 3. In problem (4) the system $\mathbf{\Sigma}(v = v^G)$ is of the form

$$\dot{x} = \phi(t, x, u, v^G(t)), \quad x(t_*) = x_*,$$

and criteria (3) are converted into

$$J^{(i)}(u, v^G) = \Phi^{(i)}(x(\vartheta)) + \int_{t_*}^{\vartheta} F^{(i)}(t, x(t), u(t), v^G(t))dt, \quad i \in \mathbf{N}.$$

In the problem (4) a control $u^G(\cdot) \in \mathcal{U}$ is maximal by Geoffrion if

1) $u^G(\cdot)$ is maximal by Pareto in this problem, i.e. for all $u(\cdot) \in \mathcal{U}$) the system of inequalities

$$J_i(u^G, v^G) \leq J_i(u, v^G), \quad i \in \mathbf{N}$$

is incompatible, besides at least one inequality is strict;

2) there exists a constant $\gamma_1 > 0$ such that if for some $j \in \mathbf{N}$ and $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ we have

$$J_j(u, v^G) > J_j(u^G, v^G),$$

then the number $k \in \mathbf{N}$ is found such that

$$J_k(u, v^G) < J_k(u^G, v^G),$$

and

$$J_j(u, v^G) - J_j(u^G, v^G) \leq \gamma_1[J_k(u^G, v^G) - J_k(u, v^G)].$$

Similarly, the uncertainty $v^G(\cdot) \in \mathcal{V}$ is minimal by Geoffrion in the problem (5) if

1) it is minimal by Pareto in this problem, i.e. for all $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ the system of inequalities

$$J_i(u^G, v) \leq J_i(u^G, v^G), \quad i \in \mathbf{N},$$

(at least one of which is strict) is incompatible;

2) there exists a constant $\gamma_2 > 0$ such that if for some $j \in \mathbf{N}$ and $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ we get

$$J_j(u^G, v) < J_j(u^G, v^G),$$

Then one can find the number $k \in \mathbf{N}$ such that

$$J_j(u^G, v^G) - J_j(u^G, v) \leq \gamma_2[J_k(u^G, v) - J_k(u^G, v^G)].$$

2. Auxiliary Assertions

Assertion1. If there exists $\alpha_i = const > 0$ and $\beta_i = const > 0$, $i \in \mathbf{N}$, such that

$$\max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i J_i(u, v^G) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i J_i(u^G, v^G),$$
$$\max_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} [-\sum_{i\in\mathbf{N}} \beta_i J_i(u^G, v)] = -\sum_{i\in\mathbf{N}} \beta_i J_i(u^G, v^G). \tag{6}$$

Then the couple $(u^G(\cdot), v^G(\cdot)) \in \mathcal{U}\times\mathcal{V}$ is a saddle point by Geoffrion in the problem (1).

This assertion is implied by the Geoffrion Theorem [4, p.80].

Now let us consider an auxiliary non-cooperative two-person game

$$< \{1,2\}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \{I_i^*(u,v)\}_{i=1,2} > . \tag{7}$$

In this game the player 1 using his strategy $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ strives to get the largest possible value of his payoff function

$$I_1^*(u,v) = I_1^*(u,v,\alpha) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i J_i(u,v). \tag{8}$$

And the player 2, choosing $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, strives to get the largest possible value of his payoff function

$$I_2^*(u,v) = I_2^*(u,v,\beta) = -\sum_{i\in\mathbf{N}} \beta_i J_i(u,v). \tag{9}$$

The Nash equilibrium situation $(u^G(\cdot), v^G(\cdot)) \in \mathcal{U}\times\mathcal{V}$ in the game (7) is determined (see [5]) by the equalities (6) (of course, if the constants $\alpha_i > 0$ and $\beta_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$ are given in advance).

Remark 4. Thus to construct a saddle point by Geoffrion $(u^G(\cdot), v^G(\cdot))$ one should find a Nash equilibrium situation in the game (7) for at least one set of constants $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$. In view of Remark 2 the constructing of Geoffrion guaranteed solution for the problem (1) is reduced to the mentioned situation constructing.

Let in the game (7) the constants $\alpha_i = \beta_i = 1$ $(i \in \mathbf{N})$. In this case we reduce the constructing of Nash equilibrium situation in (7) to the finding of saddle point in a two-person zero-sum game

$$< \{1,2\}, \mathcal{M}, \mathcal{M}, I(U,V) > \tag{10}$$

obtained from (7). Namely, in the game (10) the player 1 choosing his strategy $U(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in \mathcal{M}$ strives to increase the value of a functional

$$I(U,V) = \sum_{i\in\mathbf{N}} J_i(u_1, v_2) - \sum_{i\in\mathbf{N}} J_i(v_1, u_2). \tag{11}$$

And the player 2 choosing $V(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{U}\times\mathcal{V} = \mathcal{M}$ strives to decrease mentioned functional.

The solution of the game (10) is a saddle point $(U^0(\cdot), V^0(\cdot)) \in \mathcal{M}\times\mathcal{M}$ determined by the inequalities

$$I(U, V^0) \le I(U^0, V^0) \le I(U^0, V), \quad \forall U(\cdot) \in \mathcal{M}, \forall V(\cdot) \in \mathcal{M}. \tag{12}$$

The functional $I(U,V)$, determined on $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$, is called [2, p. 176] a strongly concave in $U(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ if there exists $\tau_1 = const > 0$ such that for every $V(\cdot) \in \mathcal{M}$

$$I(\lambda U^{(1)} + (1-\lambda)U^{(2)}, V) \ge \lambda I(U^{(1)}, V) + (1-\lambda) I(U^{(2)}, V) +$$
$$+1/2\lambda(1-\lambda)\tau_1 \cdot ||U^{(1)}(\cdot) - U^{(2)}(\cdot)||_{L_2^{r+q}}, \quad \forall U^{(k)}(\cdot) \in \mathcal{M} \quad (k=1,2), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

And $I(U,V)$ is strongly convex in $V(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ if there exists $\tau_2 = const > 0$ such that for every $U(\cdot) \in \mathcal{M}$

$$I(U, \lambda V^{(1)} + (1-\lambda)V^{(2)}) \leq \lambda I(U, V^{(1)}) + (1-\lambda)I(U, V^{(2)}) -$$
$$-1/2\lambda(1-\lambda)\tau_2 \cdot ||V^{(1)}(\cdot) - V^{(2)}(\cdot)||_{L_2^{r+q}}$$

for all $V^{(k)}(\cdot) \in \mathcal{M}$ $(k = 1, 2)$ and for each $\lambda \in [0, 1]$.

If functional $I(U, V)$ is strongly concave in $U(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ and strongly convex in $V(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ then it is said to be a strongly concave-convex over $\mathcal{M}^2$. Note, that the notion of strong concavity (convexity) of functionals can be given for the convex sets $\mathcal{M}$ only.

Assertion 2. Let the functional $I(U, V)$ from (11), (3) be strongly convex-concave over $\mathcal{M}^2$ and there exists a saddle point $(U^0(\cdot), V^0(\cdot)) \in \mathcal{M}^2$ in the game (10). Then

1. this saddle point is unique,
2. $U^0(t) = V^0(t)$ for almost all $t \in [t_*, \vartheta]$.

Доказательство. Assume that in the game (10) there exists a saddle point $(U^{(1)}(\cdot), V^{(1)}(\cdot)) \in \mathcal{M}^2$ such that $V^0(t) \neq V^{(1)}(t)$ on the zero-measure set. Then the properties of interchangeability and equivalence imply ([6, p. 40]) the couples $(U^0(\cdot), V^{(1)}(\cdot))$ and $(U^{(1)}(\cdot), V^0(\cdot))$ are the saddle points of the functional $I(U, V)$. Moreover,

$$I(U^0(\cdot), V^0(\cdot)) = I(U^0(\cdot), V^{(1)}(\cdot)) = I(U^{(1)}(\cdot), V^0(\cdot)) = I(U^{(1)}(\cdot), V^{(1)}(\cdot)).$$

In view of strong convexity of $I(U^0, V)$ in $V(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ and convexity of $\mathcal{M}$ for the strategy $\tilde{V}(\cdot) = 1/2[V^0(\cdot) + V^{(1)}(\cdot)]$ we have the strict inequality

$$I(U^0, \tilde{V}) = I(U^0, 1/2[V^0 + V^{(1)}]) \leq 1/2I(U^0, V^0) + 1/2I(U^0, V^{(1)}) -$$
$$-1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot \tau_2 ||V^0(\cdot) - V^{(1)}||_{L_2^{r+q}} < 1/2I(U^0, V^0) + 1/2I(U^0, V^{(1)}) =$$
$$= I(U^0, V^0)$$

contradicting (12). This contradiction implies the uniqueness of the saddle point of functional $I(U, V)$.

Now we establish the equality

$$U^0(t) = V^0(t) \quad \text{for almost all} \quad t \in [t_*, \vartheta]. \tag{13}$$

Really, combining (11) and (12) for $U^0(\cdot) = (u_1^0(\cdot), u_2^0(\cdot)) \in \mathcal{M}$ and $V^0(\cdot) = (v_1^0(\cdot), v_2^0(\cdot)) \in \mathcal{M}$ we get

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} [J^{(i)}(u_1, v_2^0) - J^{(i)}(v_1^0, u_2)] \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} [J^{(i)}(u_1^0, v_2^0) - J^{(i)}(v_1^0, u_2^0)] \leq$$
$$\leq \sum_{i \in \mathbf{N}} [J^{(i)}(u_1^0, v_2) - J^{(i)}(v_1, u_2^0)], \quad \forall u_1(\cdot), v_1(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad \forall u_2(\cdot), v_2(\cdot) \in \mathcal{V}. \tag{14}$$

Let in the left part of (14) $u_1(\cdot) = v_1^0(\cdot)$ and $u_2(\cdot) = v_2^0(\cdot)$ and in the right part $v_1(\cdot) = u_1^0(\cdot)$, $v_2(\cdot) = u_2^0(\cdot)$. Then we have

$$I(V^0, V^0) = 0 \leq I(U^0, V^0) \leq I(U^0, U^0) = 0.$$

Hence at first

$$I(V^0, V^0) = I(U^0, V^0) = I(U^0, U^0) = 0.$$

Therefore (12) the couples (V^0, V^0), (U^0, V^0), (V^0, V^0) are saddle points of the functional $I(U, V)$.

At second, due to the uniqueness of such saddle point we get (13). □

Assertion 3. Under condition of Assertion 2 the couple $(u^G(\cdot), v^G(\cdot)) = (u_1^0(\cdot), u_2^0(\cdot)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ is a Nash equilibrium situation in non-cooperative game (7), where the constants $\alpha_i = \beta_i = 1$ $(i \in \mathbf{N})$.

Доказательство. In view of Assertion 2 the left part of (14) is introduced in the form

$$\sum_{i\in\mathbf{N}}[J^{(i)}(u_1,u_2^0)-J^{(i)}(u_1^0,u_2)]\le\sum_{i\in\mathbf{N}}[J^{(i)}(u_1^0,u_2^0)-J^{(i)}(u_1^0,u_2^0)] \tag{15}$$

$$\forall u_1(\cdot)\in\mathcal{U},u_2(\cdot)\in\mathcal{V}.$$

Let in (15) $u_2(\cdot)=u_2^0(\cdot)$. Then we have

$$\max_{u_1(\cdot)\in\mathcal{U}}\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u_1,u_2^0)=\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u_1^0,u_2^0)$$

and for $u_1(\cdot)=u_1^0(\cdot)$ from (15) we get

$$\max_{u_2(\cdot)\in\mathcal{V}}[-\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u_1^0,u_2)]=-\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u_1^0,u_2^0).$$

Thus for $\alpha_i=\beta_i=1$ $(i\in\mathbf{N})$ the couple $(u^G(\cdot),v^G(\cdot))=(u_1^0(\cdot),u_2^0(\cdot))\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ is a Nash equilibrium situation in non- cooperative game (7) (this couple satisfies (6) for $\alpha_i=\beta_i=1$ $(i\in\mathbf{N})$). □

3. Existence.

Theorem. Let in the problem (1) the functional $\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u,v)$ be twice continuously differentiable and strongly concave in $u(\cdot)$ over $\mathcal{U}$ and strongly convex in $v(\cdot)$ over $\mathcal{V}$. Then the Geoffrion guaranteed solution $(u^G(\cdot),J^G)\in\mathcal{U}\times\mathbf{R}^N$ exists in this problem.

Доказательство. The strong concavity-convexity of $\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u,v)$ implies the strong concavity-convexity of $\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u_1,v_2)$ (where $u_1(\cdot)\in\mathcal{U}$ and $v_2(\cdot)\in\mathcal{V}$) and implies the strong convexity in $v_1(\cdot)$ over $\mathcal{U}$ and strong concavity in $u_2(\cdot)$ over $\mathcal{V}$ of the functional $-\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(v_1,u_2)$. Then the sum

$$\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u_1,v_2)-\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(v_1,u_2) \tag{16}$$

is strongly concave in $U(\cdot)=(u_1(\cdot),u_2(\cdot))$ over $\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ and strongly convex in $V(\cdot)=(v_1(\cdot),v_2(\cdot))$ over $\mathcal{U}\times\mathcal{V}=\mathcal{M}$. So the functional (16) is strongly concave in $V(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ for every $U(\cdot)\in\mathcal{M}$ and is strongly convex in $U(\cdot)$ over $\mathcal{M}$ for every $V(\cdot)\in\mathcal{M}$

Let $\mathcal{N}_1$ be an open set from $L_2^{r+q}[t_*,\vartheta]$ such that the convex set $\mathcal{U}\times\mathcal{V}=\mathcal{M}\subset\mathcal{N}_1$. Moreover let $\mathcal{N}_2$ be some open set and $\mathcal{M}\times\mathcal{M}\subset\mathcal{N}_1^2\subset\mathcal{N}_2$. If $\sum_{i\in\mathbf{N}}J^{(i)}(u,v)$ is twice continuously differentiable over $\mathcal{N}_1$ then the functional (16) is twice continuously differentiable over $\mathcal{N}_2$. The strong concavity-convexity and twice continuous-differentiability of (16) over $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ imply (see [7]) the existence of a saddle point $(U^0(\cdot),V^0(\cdot))\in\mathcal{M}^2$. Due to Assertion 2 this saddle point is unique and $V^0(t)=U^0(t)=(u^G(\cdot),v^G(\cdot))\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ for almost all $t\in[t_*,\vartheta]$. In view of Assertion 3 we conclude that the couple $(u^G(\cdot),v^G(\cdot))\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ is a Nash equilibrium situation in the game (7) for $\alpha_i=\beta_i=1$ $(i\in\mathbf{N})$ and, besides, (see Assertion 1) this couple is a saddle point by Geoffrion for the problem (1).

Thus, we establish that under the conditions of the theorem there exists a saddle point by Geoffrion $(u^G(\cdot),v^G(\cdot))\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ in the problem (1) and hence (see Remark 2) there exists a Geoffrion guaranteed solution $(u^G(\cdot),J(u^G,v^G))\in\mathcal{U}\times\mathbf{R}^N$ for this problem. □

Remark 5. From the theorem we obtain the method for constructing the Geoffrion solution $(u^G(\cdot),J(u^G,v^G))\in\mathcal{U}\times\mathbf{R}^N$ in the problem (1):

– to introduce a dynamical system

$$\dot{y}=\phi(t,y,u_1,v_2),\quad y(t_*)=x_*,$$

$$\dot{z} = \phi(t, z, v_1, u_2), \quad z(t_*) = x_*, \tag{17}$$

and functionals

$$J^{(i)}(u_1, v_2) = \Phi^{(i)}(y(\vartheta)) + \int_{t_*}^{\vartheta} F^{(i)}(t, y(t), u_1(t), v_2(t))dt, \quad i \in \mathbf{N} = \{1, .., N\}, \tag{18}$$

$$J^{(i)}(v_1, u_2) = \Phi^{(i)}(z(\vartheta)) + \int_{t_*}^{\vartheta} F^{(i)}(t, z(t), v_1(t), u_2(t))dt, \quad i \in \mathbf{N} = \{1, .., N\}, \tag{19}$$

where $u_1(\cdot), v_1(\cdot) \in \mathcal{U}$ and $v_2(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{V}$;

– for the functional

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} J^{(i)}(u_1, v_2) - \sum_{i \in \mathbf{N}} J^{(i)}(v_1, u_2) - \max_{U(\cdot)} \min_{V(\cdot)}$$

under the restrictions (17) and (19) to find the saddle point $(U^0(\cdot), V^0(\cdot)) \in \mathcal{M}^2$, where $U^0(\cdot) = (u_1^0(\cdot), u_2^0(\cdot)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} = \mathcal{M}$, $V^0(\cdot) = (v_1^0(\cdot), v_2^0(\cdot)) \in \mathcal{M}$;

– to find the values $J^{(i)}(u_1^0, u_2^0)$ $(i \in \mathbf{N})$ and to construct the vector $J(u_1^0, u_2^0) = (J^{(1)}(u_1^0, u_2^0), .., J^{(N)}(u_1^0, u_2^0)) = J^G$.

Then the couple $(u_1^0(\cdot), u_2^0(\cdot)) = (u^G(\cdot), v^G(\cdot)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ will be a saddle point by Geoffrion in the problem (1) and $(u^G(\cdot), J^G)$ will be the Geoffrion guaranteed solution of this problem.

<u>Remark 6.</u>

In order that the functional $\Phi(x(\vartheta)) + \int_{t_*}^{\vartheta} F(t, x(t), u(t), v(t))dt = \sum_{i \in \mathbf{N}} J^{(i)}(u, v)$ is strongly convex-concave over $\mathcal{M}$ the functions $F(t, x, u, v) = \sum_{i \in \mathbf{N}} F^{(i)}(t, x, u, v)$, $\Phi(x) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \Phi^{(i)}(x)$ and the right parts of the system (2) must satisfy some restrictions. These restrictions can be found in [7].

References

[1] A.F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right part.* Moscow:Sci.,1985 (in Russian)

[2] F.P. Vasilyiev. *Methods of optimization.* Moscow: F. Press, 2002 (in Russian)

[3] A.M. Geoffrion. *Proper efficiency and the theory of vector maximization* // J. Math. and Appl. 1968. V.22, N3, p.618-630.

[4] V.V. Podinovskiy, V.D. Nogin. *Pareto-optimal solutions of multicriteria problems.* Moscow:Sci., 1982 (in Russian)

[5] J.F. Nash. *Non-cooperative games* // Ann. Math. 1951. 54. p.286-295.

[6] N.N. Vorobyev. *The game theory for cybernetics-economists.* Moscow: Sci., 1985 (in Russian)

[7] V.I. Zhukovskiy. *To the theory of differential games with integral payment.* //Cyb. 1971. N4. p.130-142. (in Russian)

Zhukovskiy V.I., Sachkov S.N., Department of Mathematics and Mechanics, Russian Correspondence Institute of Textile and Light Industries, 38-2, Narodnogo Opolcheniya Str., Moscow, 123298, Russia, Phone: (095) 943-19-04

E-mail: `molostv@isa.ac.ru`

RISK IN NON-COOPERATIVE GAME UNDER UNCERTAINTY

V.I. Zhukovskiy, L.V. Zhukovskaya
RCITLI, Moscow, Russia

The peculiarity of taking into account of risk in non-cooperative game under uncertainty is revealed. We assume that the limits of changes are the only thing known about these uncertainties.

1. Statement of the problem.

Consider a non-cooperative game of N players under uncertainty

$$< \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}} > . \quad (1)$$

Here $\mathbf{N} = \{1,..,N\}$ is the set of *players numbers.* Every i-th player ($i \in \mathbf{N}$) chooses his *strategy* $x_i \in X_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$. As a result the *game situation* $x = (x_1,..,x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbf{N}} X_i$ is composed. Also some *uncertainty* $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$ is realized independently of the players choice. On the set $X \times Y$ the *payoff function* $f_i(x,y)$ $i \in \mathbf{N}$ of the i-th player is determined. The value of this function on the concrete couple (x,y) is said to be the player's payoff.

The player's objective point in the game is to choose his strategy so that his payoff will be as large as possible. When choosing their strategy the players should allow for emerging of any uncertainty $y \in Y$ unpredictable in advance.

For the game the optimal solution based on the suitable modification of Wald principle has already been proposed (see [1]) (principle of maximin utility). However the usage of this approach orients the players to the "catastrophe". As a rule the probability of catastrophe appearance is small. Therefore for the game (1) a new concept of guaranteed solution is offered. This concept is based on the suitable modification of minimax regret principle (see [2]).

The following designations are used:

X_i^Y is the set of functions $x_i(y)$ determined on Y with values from X_i; situations $(x) = (x_{\mathbf{N}\setminus i}, x_i)$; N-vector-columns $\Phi^{(r)} = (\Phi_1^{(r)},..,\Phi_N^{(r)})$ $(r = 1,2)$; $(\Phi^{(1)} < \Phi^{(2)}) \Leftrightarrow (\Phi_i^{(1)} < \Phi_i^{(2)}, i \in \mathbf{N})$; $(\Phi^{(1)} \not< \Phi^{(2)}) \Leftrightarrow \rceil(\Phi^{(1)} < \Phi^{(2)})$; $X_{\mathbf{N}\setminus i} = \prod_{j\in\mathbf{N}\setminus i} X_j$. Further every payoff function $f_i(x,y)$ is put into correspondence to risk-function of the i-th player

$$\Phi_i(x,y) = \max_{z_i\in X_i} f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, z_i, y) - f_i(x,y) \quad (i \in \mathbf{N}). \quad (2)$$

This function shows the regret of the i-th player. The regret means the following. For the couple $(x,y) \in X \times Y$ composed in the game the player i has used the strategy x_i but not $arg \max_{z_i\in X_i} f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, z_i, y)$. Every player aims to get the smallest possible value of his risk-function. Besides, the players should allow for emerging of any uncertainty $y \in Y$.

Let the game (1) the non-cooperative N-person game under uncertainty correspond to

$$< \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, Y, \{\Phi_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}} > . \quad (3)$$

Here $\mathbf{N}$,X_i,Y are the same as in (1). The payoff function $\Phi_i(x,y)$ of the i-th player is of the form (2) and coincides with player's risk-function. Every i-th player chooses $x_i \in X_i$ so that his risk-function $\Phi_i(x,y)$ value will be as less as possible.

The following definition is based on the combination of the Nash equilibrium notion (from the theory of non-cooperative games (see [3])) and the notion of maximum by Slater (from the theory of multicriteria problems (see[4])).

Definition. The couple $(x^e, \Phi^*) \in X \times \mathbf{R}^N$ is said to be the *guaranteed R-solution* of the game (1) if there exists an uncertainty $y^* \in Y$ such that $\Phi^* = \Phi(x^e, y^*)$ and

$$\Phi_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}, x_i, y^*) \geq \Phi_i(x^e, y^*), \quad \forall x_i \in X_i \quad (i \in \mathbf{N}), \tag{4}$$

$$\Phi_i(x^e, y^*) \not< \Phi_i(x^e, y), \quad \forall y \in Y. \tag{5}$$

The *situation* x^e is called the *R-guaranteed Nash equilibrium*. And the vector $\Phi(x^e, y^*)$ is called the *R-guaranteed risk in the game (1)*.

Remark 1. The situation x^e satisfying (4) is the Nash equilibrium in the non-cooperative game $< \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{\Phi_i(x, y^*)\}_{i\in\mathbf{N}} >$. Hence by (2) and in view of the fact that $\max\limits_{z_i} f_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, z_i, y)$ does not depend on x_i we get that x^e satisfies the conditions

$$f_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}, x_i, y^*) \leq f_i(x^e, y^*), \quad \forall x_i \in X_i \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{6}$$

This means that x^e is the Nash equilibrium in the game

$$< \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(x, y^*)\}_{i\in\mathbf{N}} > \tag{7}$$

obtained from (3) by fixing $y = y^*$.

Remark 2. The uncertainty y^* from (5) is maximal by Slater in the multicriteria problem $< Y, \{\Phi_i(x^e, y)\}_{i\in\mathbf{N}} >$ obtained from (3) by fixing $x = x^e$.

Remark 3. The game sense of the R-solution (x^*, Φ^*) is the following. Using the strategies x^e_i $(i \in \mathbf{N})$ from the R-guaranteed Nash equilibrium the players provide themselves the R-guaranteed risk $\Phi^* = (\Phi_1(x^e, y^*), ..., \Phi_N(x^e, y^*))$. Namely, whatever uncertainty $y \in Y$ is realized, the risks $\Phi_i(x^e, y)$ can not become bigger than the corresponding components of the risk Φ^* (i.e.$\Phi^* \not< \Phi(x^e, y)$).

2. Existence Theorem

Theorem. Let in the game (1)

1^0 X_i $(i \in \mathbf{N})$ be nonempty, convex and compact sets, and Y be a compact set,

2^0 payoff functions $f_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, x_i, y)$ be continuous on $X \times Y$ and be strictly concave in x_i for every fixed $(x_{\mathbf{N}\backslash i}, y) \in X_{\mathbf{N}\backslash i} \times Y$.

Then the guaranteed R-solution of the game (1) is a couple $(x^e, 0_N)$ where x^e is the Nash equilibrium situation in the game (7) (i.e. x^e satisfies (6)) and 0_N is a zero N-vector.

Доказательство. Let us consider a set of non-cooperative games

$$\Gamma(y) =< \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbf{N}} > . \tag{8}$$

corresponding to various uncertainties $y \in Y$. According to [3, p.90], for each $y \in Y$ there exists "its own"Nash equilibrium situation $x^e(y)$ satisfying the equality

$$\max_{z_i\in X_i} f_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}(y), z_i, y) = f_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}(y), x^e_i(y), y), \quad i \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

Note, that strict concavity of $f_i(x, y)$ in x_i implies for each $y \in Y$ the strategy $x^e_i(y) \in X^Y_i$ determined by (9) is unique.

The compactness of the sets X and Y, continuity on $X \times Y$ and strict concavity in x_i of the function $f_i(x, y)$ imply the existence of only one realization $x_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, y)$ of maximum

$$\max_{z_i\in X_i} f_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, z_i, y) = f_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, x_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, y), y) \tag{10}$$

for each $(x_{\mathbf{N}\backslash i}, y) \in X_{\mathbf{N}\backslash i} \times Y$. The function $x_i(x_{\mathbf{N}\backslash i}, y)$ is continuous (see [5, p.54]). From (10) for $x_j = x^e_j(y) \in X^Y_j$ and $x^e_j(y)$, satisfying (9), we get

$$\max_{z_i\in X_i} f_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}(y), z_i, y) = f_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}(y), x_i(x^e_{\mathbf{N}\backslash i}(y), y), y) \tag{11}$$

for each $y \in Y$. Since the left parts of (9) and (10) are equal the right parts are equal to:

$$f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), x^e_i(y), y) = f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), x_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), y), y) \quad \forall y \in Y. \tag{12}$$

In view of the risk-functions (2) from (10)-(12) we get

$$\Phi_i(x^e(y), y) = 0, \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbf{N}).$$

$\square$

Remark 4. From the theorem we obtain an important game fact: if for each uncertainty $y \in Y$ the players find the Nash equilibrium situation $x^e(y) \in X$ in the game (8) and use it, they provide themselves a zero-risk when any of the uncertainties $y \in Y$ is realized in the game (1).

Remark 5. From the theorem we get the following scheme of the guaranteed solution (x^e, Φ^*) construction for the game (1):

– to construct a mathematical model of the investigated problem in the form of the ordered set (1);

– by (9) for each $y \in Y$ to construct the Nash equilibrium situation $x^e(y)$.

Then for each $y \in Y$ the couple $(x^e(y), 0_N) \in X \times \mathbf{R}^N$ is a guaranteed R-solution of the game (1). Namely, whatever uncertainty $y^* \in Y$ is realized the players applying the strategies $x^e_i(y^*)$ $(i \in \mathbf{N})$ from the Nash equilibrium situation $x^e(y^*)$ ($x^e(y^*)$ satisfies (9)), provide themselves a zero-risk (the best risk from all possible in the game (1)).

References

[1] V.I. Zhukovskiy. *Introduction to Differential Games under Uncertainty.* Moscow, 1997 (in Russian).

[2] L.J. Savage. *The Foundations of Statistics.* New York: Wiley, 1954.

[3] V.V. Vorobiyov. *Game Theory Bases. Non-Cooperative Games.* Moscow: Sci., 1984 (in Russian).

[4] V.V. Podinovskiy, V.D. Nogin. *Pareto-Optimal Solutions of Malticriteria Problems.* Moscow: Sci., 1982 (in Russian).

[5] V.V. Morozov, A.G. Sukharev, V.V.Fyodorov. *Operations research in problems and exercises.* Moscow: Higher School, 1986. (in Russian)

Department of Mathematics and Mechanics, Russian Correspondence Institute of Textile and Light Industries, 38-2, Narodnogo Opolcheniya Str., Moscow, 123298, Russia, Phone: (095) 943-19-04

E-mail: `molostv@isa.ac.ru`

Section 4

COMPUTER SCIENCES

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА В РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ [4]

С.И. Гуров
МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

В статье предлагается новый класс дискретных распознающих алгоритмов, основанных на голосовании, в которых в качестве элементарных классификаторов используются монотонные функции, получаемые при разложении Э. Гильберта. Получена точная нижняя оценка мощности множества вершин единичного булевого куба, покрываемых совокупностью безызбыточной системы интервалов и, как следствие — точная нижняя оценка мощности единичного множества монотонной булевой функции.

1. Разложение Гильберта

Известны различные представления булевых функций: с помощью д.н.ф. и к.н.ф. различных видов, полиномов Жегалкина и т.д.

Для целей использования аппарата теории функций алгебры логики при распознавании образов хотелось бы иметь представление, обладающее свойством последовательного приближения к заданной функции по мере увеличения его составляющих ("членов приближения"), как это имеет место при разложении действительных функций в ряд по той или иной системе базисных функций. Имея такое разложение возможно было бы оценить степень близости нового объекта (вершина булева единичного куба $\tilde{y}$) к классу (ч.б.ф. $f(\tilde{x})$) максимальным количеством членов разложения, необходимым для того, чтобы вершина $\tilde{y}$ принадлежала множеству единичных наборов аппроксимирующей булевой функции с данным числом членов.

Такому требованию удовлетворяет разложение булевой функции $f(\tilde{x})$ вида

$$f(\tilde{x}) \;=\; M_1 \,\&\, \overline{M_2 \,\&\, \overline{M_3 \,\&\, \ldots \;\&\, \overline{M_{m-1} \,\&\, \overline{M_m}}}}\,, \tag{1}$$

где $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_m$ — монотонные булевы функции. Данное разложение введено и исследованно в работе [3] американского математика Э.Н. Гильберта, и мы предлагаем называть его *разложением Гильберта.*

Разложение (1) единственно для полностью определённых булевых функций. Оно обладает тем свойством, что

$$N^1_{M_1} \supset N^1_{M_2} \supset \ldots \supset N^1_{M_m} \tag{2}$$

(N^1_f обозначает, как обычно, множество единичных наборов функции f). Итерационный алгоритм последовательного нахождения функций $M_1,\ M_2,\ \ldots$ извлекается из работы [3].

Если исходная булева функция частичная, то под $f(\tilde{x})$ в (1) нужно понимать некоторое возможное её доопределение до полностью определённой. Конечно, здесь следовало бы применить другое обозначение для левой части (1), однако нам кажется, такая вольность записи не затруднит общее понимание.

В силу того, что такое доопределение не единственно, монотонные функции в разложении Гильберта определяются, вообще говоря, неоднозначно. Однако эта однозначность восстанавливается, если ввести естественное требование экстремальности: на каждом шаге итерационного алгоритма выбирать функции, имеющие нечётные индексы с минимально, а чётные — с максимально возможным множеством единичных наборов. Ясно, что это соответствует выбору единственного из возможных и экстремального в указанном смысле доопределения. Данный алгоритм был разработан и реализован автором в 1991 г. при

[4] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00885

построении подсистемы логического синтеза макроблоков «LORD» в составе САПР заказных БИС [1].

Пусть теперь ч.б.ф. $f(\tilde{x})$ описывает прецедентную информацию о некотором классе объектов, для которой, в предположении об экстремальности выбираемых монотонных функциях, получено разложение Гильберта и $\tilde{y}$ — признаковое описание объекта, подлежащего классификации. Естественно теперь оценить близость $\Gamma(\tilde{y})$ объекта $\tilde{y}$ к классу, описанному ч.б.ф. $f(\tilde{x})$ (или "вес" соответствующего голоса) по следующему правилу:

$$\Gamma(\tilde{y}) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } \tilde{y} \in N^1_{M_m} \text{ и } k \text{ нечётно,} \\ \dfrac{k}{m}\,, & \text{если } \tilde{y} \in \{N^1_{M_k} \cap N^0_{M_{k+1}}\},\ 1 \leqslant k < m,\ k \text{ нечётно,} \\ 0\,, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такая оценка оправдывается структурой разложения Гильберта и его основным свойством (2). Поскольку содержательно функция $f(\tilde{x})$ описывает некоторый объективно существующий класс объектов, предполагается, что m будет невелико, если верна гипотеза компактности классов (см., например, [2]).

Можно также вычислить оценку того, что исследуемый объект далёк от данного класса, взяв в указанной процедуре вместо функции $f(\tilde{x})$ её отрицание. Некоторые возможные методы работы с оценками «за» и «против» принадлежности объекта классу имеются в [2].

2. Вектор поляризации

В предыдущем разделе указаны способы построения элементарного классификатора и вычисления значения функции близости объекта классу. Очевидно, однако, что структурные свойства булевых функций одинаковы в классах эквивалентности Шеннона-Поварова, определяемых изометрическими преобразованиями булева гиперкуба.

Выбор монотонных функций в качестве приближающих ч.б.ф. f влечёт сужение классов эквивалентности: инвариантность структурных свойств приближения будет иметь место лишь при одном их двух преобразований, определяющих указанные классы, а именно при перестановках переменных. При другом преобразовании — инвертировании всех вхождений в то или иное функциональное выражение определённых булевых переменных — структура разложения (1) будет, вообще говоря, меняться.

Данное преобразование можно аналитически описать формулой

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \tilde{\gamma}\,, \tag{3}$$

где символ "+" означает сложение по $mod\,2$, а $\tilde{\gamma}$ — булев вектор, который, заимствуя терминологию из работ по полиномам Жегалкина, назовём *вектором поляризации.*

Булев единичный куб после подвергнутый преобразованию (3) будем называть *преобразованным* или, конкретнее, *сдвинутым* (с помощью вектора $\tilde{\gamma}$) кубом, поскольку данное преобразование является аналогом переноса начала координат в непрерывном случае. При $\tilde{\gamma} = \tilde{0}$ имеем тождественное преобразование, при произвольном $\tilde{\gamma} \in B^n$ преобразование задаётся инвертированием в произвольном выражении всех переменных из множества $1(\tilde{\gamma})$.

Более аккуратно функции в (1) следует обозначать $M_i(f)$, $i = \overline{1,\, m}$, а m как $m(f)$ подчёркивая их зависимость от исходной ч.б.ф. $f(\tilde{x})$. Эту функцию подвергнутую преобразованию (3) обозначим $f_{\tilde{\gamma}}(\tilde{x})$. При разных $\tilde{\gamma}$ мы будем получать разложения (1) с разными составляющими его монотонными функциями. Таким образом в разложении Гильберта на сдвинутом булевом будут фигурировать функции $M_i(f_{\tilde{\gamma}})$, $i = \overline{1, m(f_{\tilde{\gamma}})}$.

Среди всевозможных таких разложений наибольший представляют интерес те, которые доставляют минимум "длины разложения" m в (1), т.е. решения задачи

$$m(f_{\tilde{\gamma}}) \to \min\,, \qquad \tilde{\gamma} \in B^n\,. \tag{4}$$

Однако дальнейший анализ предлагаемого метода классификации при таком функционале оптимизации представляется достаточно сложным и мы оставляем его для дальнейших исследований. Здесь же мы рассмотрим следующий приближённый критерий оптимальности вектора поляризации $\tilde{\gamma}$:

$$\left| N^1_{M_1(f_{\tilde{\gamma}})} \right| \to \min\,, \qquad \tilde{\gamma} \in B^n\,. \tag{5}$$

Вектор $\tilde{\gamma}$, отвечающий этому критерию содержательно отвечает представлению о некотором “центре” соответствующего класса образов. С другой стороны, легко показать, что решение задачи оптимизации, как исходной (4), так и упрощённой (5), вообще говоря, не единственно.

Итак, решение задачи распознавания предлагаемым методом сводится к следующим шагам.

(1) Данному классу, заданному вершинами единичного булева куба, сопоставляют частичную булеву функцию (ч.б.ф.) f.
(2) (a) Решается задача (5) (или (4)) в результате которой находится совокупность $\{\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_s\}$ оптимальных векторов поляризации.
   (b) Для каждого найденного значения $\tilde{\gamma}_i$, $i = \overline{1, s}$ находится разложение Гильберта функции $f_{\tilde{\gamma}_i}$ и вычисляется оценка близости вектора $\tilde{y} + \tilde{\gamma}_i$ к классу по правилу, указанному в конце предыдущего раздела.
(3) Используя полученную совокупность объектов в качестве элементарных классификаторов, проводят голосование за принадлежность объекта данному классу.

Полученную совокупность оценок близости можно тем или иным способом свернуть в одну, взяв, например, среднее арифметическое от них или построить алгебру над совокупность соответствующих распознающих операторов [2].

3. Приближённые алгоритмы поиска оптимальных векторов поляризации

Для применения вышеописанного алгоритма при классификации на практике необходимо лишь предложить (точные или приближённые) методы нахождения оптимальных векторов поляризации. С исследованием задачи оптимизации ((4) или (5)) и нахождением алгоритмов её решения связана математическая проблематика предлагаемой модели алгоритма классификации. Представляется ясным, что она является не менее сложной, чем при исследовании свойств и нахождении тупиковых д.н.ф., тестовых или представительных наборов.

Здесь мы предложим алгоритм поиска решения задачи оптимизации.

Ясно, что для полностью определённой булевой функции f функция M_1 разложения Гильберта определяется как

$$N^1_{M_1} = \bigcup_{\tilde{\alpha} \in N^1_f} \tilde{\alpha}^{\triangle}\,. \tag{6}$$

Если f есть ч.б.ф., то также можно пользоваться формулой (6), получая при этом экстремальный в указанном выше смысле вариант функции M_1.

Обозначим через $LU(f)$ множество нижних единиц булевой функции f, т.е. совокупность минимальных элементов N^1_f как частично упорядоченного множества. Пусть $LU(f) = \{\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l\}$. Ясно, что $LU(f) = LU(M_1(f))$. Тогда в (6) объединение можно брать лишь по $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l$. Для $j = 1, \ldots, n$ вычислим отношения $r_j = \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{i=1}^{l} \alpha^i_j$ по множеству $LU(f)$. Зададимся значениями t_1 и t_2 таких, что $0 < t_1 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant t_2 < 1$.

Определим интервал $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \subset B^n$, $\delta_j \in \{0, 1, -\}$, $j = \overline{1, n}$ по правилу:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } r_j < t_1, \\ 0, & \text{если } r_j > t_2, \\ -, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Понятно, что при преобразовании (3) с $\tilde{\gamma} \in \delta$ мощности множеств $1(\tilde{\alpha})$ у элементов $LU(f_{\tilde{\gamma}})$, вообще говоря, увеличатся, что соответствует требованию обоих критериев оптимальности. Будем искать оптимальные по (4) или (5) векторы поляризации перебором по вершинам полученного интервала δ. Выбор определённых значений границ t_1 и t_2 позволить задать приемлемый объём перебора.

Если принять критерий оптимальности (5), то для поиска векторов $\tilde{\gamma}$ можно предложить использовать метод ветвей и границ. Тогда для каждого $\tilde{\gamma}$ необходимо оценивать значение величины $\left| N^1_{M_1(f_{\tilde{\gamma}})} \right|$. Далее для простоты записи мы опускаем индекс $\tilde{\gamma}$, считая, что преобразование (3) проведено.

Итак, мы рассматриваем задачу определения мощности единичного множества монотонной булевой функции $M_1 = M_1(LU)$, заданной своими нижними единицами $LU = LU(M_1) = \{\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l\}$, т.е.

$$N^-(LU) \leqslant \left| N^1_{M_1(LU)} \right| \leqslant N^+(LU),$$

где $N^-(LU)$, $N^+(LU)$ — соответствующие оценки. Они будут даны формулами (7) и (9) следующего раздела.

4. Оценки мощности единичного множества монотонной булевой функции

В качестве верхней оценки $N^+(LU)$ величины $| N^1_{M_1} |$ можно взять первые три члена выражения для неё, полученного по методу включений и исключений. Для этого образуем все попарные конъюнкции наборов из LU и возьмём минимальные элементы этой совокупности. Полученное множество обозначим LU^2. Образуем затем все конъюнкции из трёх наборов множества LU и также возьмём минимальные элементы полученной совокупности. Полученное множество обозначим LU^3. Поскольку $| \tilde{\alpha}^{\Delta} | = 2^{|0(\tilde{\alpha})|}$, то примем

$$N^+(LU) = \sum_{\tilde{\alpha} \in LU} 2^{|0(\tilde{\alpha})|} - \sum_{\tilde{\alpha} \in LU^2} 2^{|0(\tilde{\alpha})|} + \sum_{\tilde{\alpha} \in LU^3} 2^{|0(\tilde{\alpha})|}. \tag{7}$$

Перейдём к нижней оценке $N^-(LU)$. Мы найдем её как *точную* нижнюю оценку величины $|N^1_M|$ монотонной функции $M = M(\{\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l\})$.

Пусть $D = \{\delta^1, \ldots, \delta^l\}$ — такая совокупность интервалов B^n, что ни один из них не покрывается никаким объединением других. Назовём тогда D *безызбыточной* системой интервалов. Без потери общности можно считать, что в D интервалы упорядочены по невозрастанию их мощности, т.е.

$$|\delta^1| \geqslant |\delta^2| \geqslant \ldots \geqslant |\delta^l|.$$

Такую систему интервалов назовём *правильно упорядоченной.*Операцию округления x в бо́льшую сторону до ближайшего целого обозначаем $]x[$.

Theorem. Пусть $D = \{\delta^1, \ldots, \delta^l\}$ — безызбыточная правильно упорядоченная система интервалов B^n. Тогда имеет место оценка

$$N(D) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \bigcup_{i=1}^{l} \delta^i \right| \geqslant \sum_{i=1}^{l} \left] \frac{|\delta^i|}{2^{i-1}} \right[. \tag{8}$$

Доказательство. Напомним, что пересечение двух интервалов в B^n есть интервал и мощность подинтервала минимального ранга есть половина мощности исходного интервала.

Пусть ß^1 и ß^2 — два интервала единичного булева куба и $|\text{ß}^1| \geqslant |\text{ß}^2|$. Имеем $|\text{ß}^1 \cap \text{ß}^2| \leqslant \dfrac{|\text{ß}^2|}{2}$. Если в последнем соотношении достигается равенство (максимальное пересечение интервалов без полного накрытия меньшего интервала большим), то $\text{ß} = \text{ß}^2 \setminus \{\text{ß}^1 \cap \text{ß}^2\}$ — также интервал и его мощность есть $|\text{ß}| = \dfrac{|\text{ß}_2|}{2}$.

Пусть имеется безызбыточная правильно упорядоченная система интервалов B^n мощности $k > 1$.

Нижняя достигаемая оценка мощности интервала $\delta^{(-2)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^1 \setminus \delta^2$ есть $|\delta^2| - \dfrac{|\delta^2|}{2} = \dfrac{|\delta^2|}{2}$.

Нижняя достигаемая оценка мощности интервала $\delta^{(-3)} \stackrel{\text{def}}{=} (\delta^1 \cup \delta^2) \setminus \delta^3$ есть $|\delta^3| - \dfrac{|\delta^3|}{2} - \dfrac{|\delta^3|}{4} = \dfrac{|\delta^2|}{4}$ и т.д. Поскольку система интервалов D по условию безызбыточная, имеем $|\delta^{(-k)}| \geqslant \max\left\{\dfrac{|\delta^k|}{2^{k-1}},\ 1\right\}$, что завершает доказательство. □

Замечание 8. Полученная оценка является точной и можно указать конкретные классы случаев, минимум мощности объединения интервалов из безызбыточной системы достигается.

Поскольку система верхних конусов нижних единиц монотонной булевой функции является безызбыточной, то справедливо

Следствие. *Пусть $LU = \{\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l\}$ — множество нижних единиц монотонной булевой функции $M = M(LU)$, элементы которого упорядочены по невозрастанию величин соответствующих верхних конусов, т.е. $|0(\tilde{\alpha}^i)| \geqslant |0(\tilde{\alpha}^{i+1})|,\ i = \overline{1,\ (l-1)}$. Тогда*

$$N^-(LU) = \sum_{i=1}^{l} 2^{\lfloor |0(\tilde{\alpha}^i)| - i + 1 \rfloor} \leqslant \left|N^1_{M(\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^l)}\right|, \tag{9}$$

где

$$\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|x| + x}{2} = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0\,, \\ 0, & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

Итак, формула для $N^-(LU)$ получена: выражение (8) для нижней оценки $N(D)$ произвольной безызбыточной системы интервалов D было применено к множеству верхних конусов нижних единиц $LU(M)$ монотонной булевой функции M, получив при этом вид (9). Данная оценка будет тем ближе к $\left|N^1_{M(LU)}\right|$, чем сильнее будет взаимное пересечение интервалов из $D = LU$. Это как раз и обеспечивается критерием (5).

Автор глубоко признателен академику РАН Ю.И. Журавлёву за неизменные понимание и поддержку.

Список литературы

[1] **Авдеев Ю.В., Гаврилов С.В., Гуров С.И. и др.** САПР заказных БИС на открытых вычислительных системах // Электронная техника. Сер. 3. «Микроэлектроника», № 1, 1992. — С. 54-58.

[2] **Журавлев Ю.И.** Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 33. — М.: Наука. 1978. — С. 5-68.

[3] **Gilbert E.N.** Lattice theoretic properties of frontal swithing functions // J. Math. Phys., № 1, 1954, pp. 57-67. (Русск. пер.: **Э.Н. Гильберт.** Теоретико-структурные свойства замыкающих переключающих функций // Кибернетич. сборник, № 1, 1960, с. 175-188.)

РФ, г. Москва, ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: sgur@cs.msu.su, gurov@ccas.ru

Содержание

Предисловие ... iii

Section 1. Spectral Problems

Subsection 1.1. Spectral Theory of Not Self-Adjoint Operators

Е. В. Акулич *Символическое исчисление для теплицевых операторов с разрывными осциллирующими коэффициентами* ... 3

И. М. Карабаш, М. М. Маламуд *О подобии J-самосопряжённого оператора штурма-лиувилля с конечнозонным потенциалом–самосопряжённому* ... 8

А. С. Костенко *О подобии нормальному оператору операторов типа* $\operatorname{sgn} x\,(D^2 + aD + bI + c\delta)$ ... 12

Л.Л.Оридорога *О представлении конечномерных операторов в виде суммы ортопроекторов* ... 17

А.В.Яковлев *Задача о нормальных колебаниях вязкоупругого стержня с грузом на конце* ... 22

M. S. Derevyagin, V. A. Derkach *On Direct And Inverse Spectral Problem For Generalized Jacobi Matrices* ... 36

I. Yu Domanov, V. V. Surovtseva *On The Reflexivity Of The Operator* $J_k^\alpha \oplus J_{k+s}^\alpha$ ... 41

G.S.Romashchenko *Invariant And Hyperinvariant Subspaces Of The Operator* J^α *In The Sobolev Spaces* ... 45

K.K.Simonov *On Entire Functions Of Cartwright Class With A Finite Number Of Singularities* ... 50

Subsection 1.2. Spectral Theory of Operator Pencils

Э.И.Белоусова, В.В.Белоусов *Автомодельные решения задачи об установившихся течениях в прибрежной зоне моря* ... 55

К. И. Чернышов *Об Экспоненте матричного пучка, зависящего от параметра, в случае кратного спектра предельной матрицы* ... 65

M.M.Malamud, V.I.Mogilevskii *Generalized Resolvents Of Isometric Operators* ... 82

Nicolae Ţiţa *Some Equivalent Quasinorms On Operator Ideals* ... 94

Section 2. Evolution and Boundary Value Problems

Subsection 2.1. Differential-Operator and Evolution Equations

А.В.Агибалова, Л.Л.Оридорога *О полноте систем собственных и присоединённых функций дифференциальных операторов порядка* $2-\varepsilon$ ... 103

В.М.Говоров *Некоторые свойства n-параметрических косинус-функций* ... 108

А.П.Гуревич, А.П.Хромов *Суммируемость по риссу спектральных разложений слабо нерегулярных краевых задач* 113

М.З.Двейрин, А.В.Фокша *О представлении ядра* $\cos(\alpha-\beta)$ *композицией специальных ядер* 121

Е.В.Иванова *К вопросу о рассмотрении квантовых систем методом интегралов движения* 124

Н.Д.Копачевский *Задача коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве* 130

А.Ю.Мальцев *Задача коши для уравнения с нерегулярным эллиптическим оператором, зависящим от времени* 143

И.В.Орлов *Обобщенная формула конечных приращений для производных по мере* 148

А.О.Ремизов *Векторные поля и слоения, порождаемые неявными дифференциальными уравнениями* 159

Рыхлов В. С. Полнота собственных функций некоторых классов нерегулярных дифференциальных операторов 165

I.I.Kovtun *On Moments Of A System Of Two Differential Equations With Stochastic Perturbations* 170

Subsection 2.2. Boundary Value Problems

P.M.Lima, A.M.Oliveira *Numerical Methods And Asymptotic Expansions For A Singular Boundary Value Problem* 177

D.V.Limansky *On Subordinated Conditions For A System Of Minimal Differential Operators In The Spaces* L_∞ 185

E. Shulman *On Some Functional Equations Of Addition Theorem Type* 192

Section 3. Optimization, Control, Games and Economic Behavior

Е.Н. Хайлов *О параметрическом задании множества достижимости однородной билинейной системы с некоммутирующими матрицами* 199

O. V. Solonukha *On Solvability And Exrteme Regularization Of Variational Inequalities With Set–Valued Operators* 206

V.I. Zhukovskiy, S.N. Sachkov , E.N. Sachkova *Existence Of Guaranteed Solution For Multicriteria Problem* 211

V.I. Zhukovskiy, L.V. Zhukovskaya *Risk In Non-Cooperative Game Under Uncertainty* 217

Section 4. Computer Sciences

С.И.Гуров *Использование разложения гильберта в распознавании образов* 223

Сборник научных трудов

Информационно-издательский отдел
Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
95007, Симферополь, пр-т. Вернадского, 4

Подписано к печати Формат 60×84/8 Бумага тип.
Объем 15 печ. л. Тираж 300 экз. Заказ